Coût marginal et optimisation du coût de production

1 Exemple d'introduction

Une semaine avant son entrée en terminale, un élève de première générale ayant choisi la spécialité « Mathématiques » décide de réviser tout son cours de Mathématiques depuis le début de son année de première sans s'arrêter !

De 8H à 9H, il est en pleine forme et très motivé. Il réussit à réviser et apprendre parfaitement 12 pages de cours.

De 9H à 10H, 12 nouvelles pages.

De 10H à 11H, il commence à fatiguer, mais il persévère, et parvient à apprendre 10 pages.

Chaque nouvelle heure de révision est alors de plus en plus difficile... de 17H à 18H, il arrive difficilement à réviser et apprendre 1 page et commence à mélanger toutes les notions...

Au final, toute nouvelle heure de révision supplémentaire est de moins en moins efficace. N'aurait-il pas mieux valu arrêter, prendre un temps de repos bien mérité et reprendre le lendemain ?

2 Quelques définitions du programme de SES

Coût total : coût subi par l'entreprise lors de son activité productive. Il est la somme des coûts fixes (qui ne dépendent pas du volume de production) et des coûts variables (qui eux varient en fonction de la quantité produite).

Coût moyen : rapport entre le coût total et la quantité produite. Il donne le coût qu'en moyenne chaque unité produite a généré, même si chaque unité n'a pas nécessairement coûté ce prix là.

Coût marginal : coût additionnel lié à la production d'une unité supplémentaire.

Loi des rendements décroissants : loi selon laquelle plus le niveau de production est élevé, et moins la productivité marginale des facteurs de production utilisés est forte. Par conséquent, plus le niveau de production est élevé, et plus le coût moyen sera fort.

3 Un exemple discret

Voici un tableau résumant les coûts pour la production de 10 unités de produit.

Quantité	Coût fixe	Coût variable	Coût total	Coût marginal	Coût moyen
0	100	0	100		
1	100	80	180	80	180
2	100	150	250	70	125
3	100	210	310	60	103,33
4	100	260	360	50	90
5	100	300	400	40	80
6	100	360	460	60	76,67
7	100	430	530	70	75,71
8	100	530	630	100	78,75
9	100	680	780	150	86,67
10	100	880	980	200	98

On remarque que tant que le coût marginal est inférieur au coût moyen, le coût moyen est décroissant. En revanche, dès que le coût marginal devient supérieur au coût moyen, celui-ci devient croissant.

Ainsi, dans l'exemple proposé, le coût marginal est minimum pour 5 produits. Cela signifie que le surcoût engendré par la production d'un produit supplémentaire est le plus faible pour le cinquième produit.

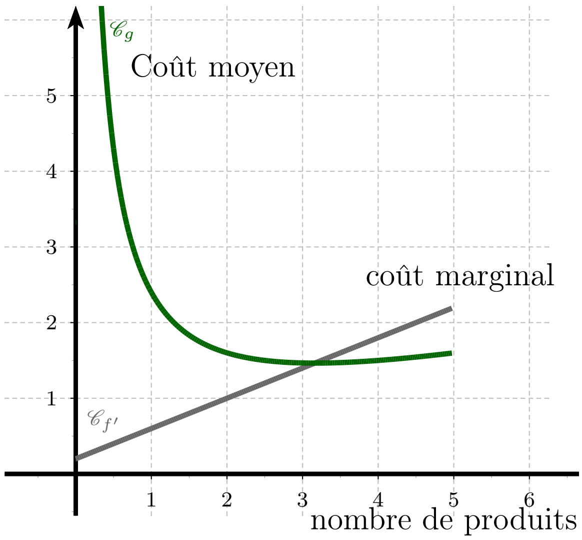
Cependant, on remarque de le coût marginal est inférieur au coût moyen jusqu'au septième produit. Le coût moyen est alors minimal pour la production de 7 produits.
Le coût de production est alors optimisé et le rendement maximal.

Que faire avec les élèves ?
Le tableau ci-dessous peut être donné à compléter et il est aussi possible d'ajouter des colonnes pour la recette et le bénéfice.
Ce tableau peut aussi être réalisé sur tableur. Les courbes du coût marginal et du coût moyen peuvent être représentées sur un même graphique pour mettre en évidence leur point d'intersection. Celui-ci correspondra à la situation optimale.
Diverses questions sur l'évolution de la production peuvent être poser et les automatismes sur les calculs de pourcentages peuvent être réactivés.
Ce travail peut être réalisé en transdisciplinarité avec les collègues de SES.

4 Vers la continuité...

Dans le cadre de la production d'un très grand nombre de produits ou de la production d'un produit assimilable à quelque chose de continu (liquide, gaz...), le coût peut être modélisé par une fonction. Même si, économiquement, cette modélisation n'est pas si simple et de nombreux facteurs sont à prendre en compte...
Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = 0,2x^2 + 0,2x + 2$.
La variable x représente le nombre, en millions, d'unités produites On suppose que $f(x)$ modélise le coût de production, en millier d'euros, de x produits.

Dans cette situation, le coût marginal est assimilé à la dérivée f' de la fonction f sur $[0;5]$ et le coût moyen est défini sur $]0;5]$ par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.



De manière assez similaire à l'exemple discret, le point d'intersection des courbes du coût marginal et du coût moyen donne la valeur optimale de production de l'entreprise. En effet, ce point correspond au minimum du coût moyen.

Que faire avec les élèves ?

Cette situation offre diverses possibilités de travaux autour des fonctions :

— travail sur le taux d'accroissement pour justifier l'emploi de $f'(x)$,
— calculs de dérivées,
— études de fonctions,
— détermination de minimum,
— recherche des coordonnées du point d'intersection (avec une méthode par balayage, avec un algorithme)...

Une fonction « recette » peut aussi être introduite pour travailler sur le bénéfice.

Sources :

— *les mathématiques dans l'économie*,par Lluís Artal et Josep Sales, collection *le monde est mathématiques* présentée par Cédric Villani.
— Documents fournis par l'équipe de SES du lycée Calvin de Noyon.
— Documents issus du site *la revanche des SES*.