Techniques de base

7. Systèmes d'équations

L'essentiel

- Un système de deux équations d'inconnues x et y, par exemple $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4x + 7y = -3 \end{cases}$ se résout par :

- substitution : on exprime une inconnue en fonction de l'autre dans une équation, puis on remplace cette inconnue par son expression dans l'autre équation .

Exemple :
On veut : $\begin{cases} x + y = 1\,400 \quad (1) \\ 3x + 2y = 3\,600 \; (2) \end{cases}$.
(1) s'écrit aussi : $y = 1\,400 - x$ (3).
Par substitution, (2) donne alors :
$3x + 2(1\,400 - x) = 3\,600$;
$3x + 2\,800 - 2x = 3\,600$;
$x = 3\,600 - 2\,800$, soit $x = 800$.
(3) donne : $y = 1\,400 - 800$, soit $y = 600$.
La solution $(x\,;\,y)$ est $(800\,;\,600)$.

- combinaisons : on multiplie les deux membres d'une équation par un même nombre ; on ajoute ou on soustrait membre à membre les deux équations.

Exemple :
On veut résoudre : $\begin{cases} 6x + 4y = 95 \quad (A) \\ 3x + 3y = 55{,}5 \quad (B) \end{cases}$.
En multipliant par 2 dans (B), on obtient :
$\begin{cases} 6x + 4y = 95 \quad (A) \\ 6x + 6y = 111 \quad (C) \end{cases}$.
En soustrayant membre à membre (A) de (C), on a $2y = 16$.
Ceci donne $y = 16 \div 2$, soit $y = 8$. (A) donne alors :
$6x + 4 \times 8 = 95$; $6x = 95 - 32$; $x = 63 \div 6$; $x = 10{,}5$.
La solution $(x\,;\,y)$ est $(10{,}5\,;\,8)$.

Tests

1 QCM Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. Le système $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ a pour solution :	**a.** $x = 1$ et $y = 3$	**b.** $x = -5$ et $y = 4$	**c.** $x = 1$ et $y = -2$	**d.** $x = 3$ et $y = -2$
2. Le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$ peut être transformé en :	**a.** $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$	**b.** $\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$	**c.** $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$	**d.** $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$

3. La différence de deux nombres positifs est 24. Si on les augmente l'un et l'autre de 8, on obtient deux nombres dont le plus grand est le triple de l'autre. Ce problème correspond au système :

a. $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 8 = 3(y + 8) \end{cases}$	**b.** $\begin{cases} x = y + 24 \\ x + 8 = 3y + 8 \end{cases}$	**c.** $\begin{cases} x = y + 8 \\ y + 8 = 3x + 24 \end{cases}$	**d.** $\begin{cases} x = y + 24 \\ x + 8 = 3y + 24 \end{cases}$

2 Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

1. L'équation $5x + 3y = 4$ a pour unique solution $(x\,;\,y)$ le couple $(-1\,;\,3)$.

2. Un système admet toujours une solution unique.

3. La solution unique d'un système correspond au couple de coordonnées du point d'intersection de deux droites.

Applications directes

3 Résoudre par substitution les systèmes suivants:

a. $\begin{cases} x + 2y = 76 \\ 4x + y = 115 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

4 **1.** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$.

2. Un artisan fabrique des perles noires et des perles dorées. Un sac contenant 10 perles noires et 4 perles dorées est vendu 24 euros. Un sac contenant 3 perles noires et 6 perles dorées est vendu également 24 euros. Combien serait vendu un sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées ?

5 Résoudre par combinaisons les systèmes suivants:

a. $\begin{cases} 10x - 3y = 35 \\ 5x - 4y = -20 \end{cases}$; **b.** $\begin{cases} 5x + 2y = 13{,}5 \\ 3x + 6y = 22{,}5 \end{cases}$.

6 Deux amis ont fait des courses le même jour et à la même boulangerie. L'un a payé 5,85 euros pour l'achat de 5 pains aux raisins et 3 croissants. L'autre a payé 3,65 euros pour l'achat de 3 pains aux raisins et 2 croissants.

1. Écrire un système d'équations traduisant ces données.

2. En déduire le prix d'un pain aux raisins et celui d'un croissant.

Techniques de base

7. Systèmes d'équations

Corrigés

Tests

1 **1.** Pour $x = 1$ et $y = -2$, on a :
$x + 3y = 1 + 3 \times (-2) = -5$
et $2x - y = 2 \times 1 - (-2) = 4$.
Le système $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ a pour solution $x = 1$ et $y = -2$: réponse **c.**

2. En multipliant les deux membres de la première équation par 2, le système $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$ peut être transformé en $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ -4x + 3y = 5 \end{cases}$: réponse **c.**

3. « La différence de deux nombres positifs est 24 » peut s'écrire $x - y = 24$, soit $x = y + 24$. « Si on les augmente l'un et l'autre de 8, on obtient deux nombres dont le plus grand est le triple de l'autre » donne $x + 8 = 3(y + 8)$, soit $x + 8 = 3y + 24$. Ce problème correspond au système $\begin{cases} x = y + 24 \\ x + 8 = 3y + 24 \end{cases}$: réponse **d.**

2 **1. Faux** : l'équation $5x + 3y = 4$ admet une infinité de solutions $(x ; y)$ car c'est une équation de droite.
2. Faux : un système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité.
3. Vrai.

Applications directes

3 **a.** On veut résoudre $\begin{cases} x + 2y = 76 & (A) \\ 4x + y = 115 & (B) \end{cases}$.
L'équation (A) donne : $x = 76 - 2y$ (C).
Par substitution, l'équation (B) donne :
$4(76 - 2y) + y = 115$.
On a successivement : $304 - 8y + y = 115$;
$-7y = 115 - 304$; $y = -189 \div (-7)$; $y = 27$.
L'équation (C) donne alors : $x = 76 - 2 \times 27$,
soit $x = 22$. **La solution $(x ; y)$ est $(22 ; 27)$.**

b. On veut résoudre $\begin{cases} 9x + 3y = 15 & (1) \\ 2x + y = 1 & (2) \end{cases}$.
L'équation (2) s'écrit aussi $y = 1 - 2x$. (3)
Par substitution, l'équation (1) donne alors
$9x + 3(1 - 2x) = 15$, soit $9x + 3 - 6x = 15$
ou encore $3x = 15 - 3$.
On a donc $x = 12 \div 3$, soit $x = 4$.
L'équation (3) donne alors $y = 1 - 2 \times 4$ soit $y = -7$.
La solution $(x ; y)$ est $(4 ; -7)$.

4 **1.** On veut résoudre $\begin{cases} 5x + 2y = 12 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$.
(2) s'écrit aussi $x = 8 - 2y$ (3).
Par substitution, (1) donne $5(8 - 2y) + 2y = 12$,
soit $40 - 10y + 2y = 12$.
On a donc $-8y = 12 - 40$ ou encore $y = -28 \div (-8)$,
soit $y = 3{,}5$.
(3) donne alors $x = 8 - 2 \times 3{,}5$ donc $x = 1$.
La solution du système est $x = 1$ et $y = 3{,}5$.

2. Soit x le prix d'une perle noire et y celui d'une perle dorée.
On a : $10x + 4y = 24$, soit aussi $5x + 2y = 12$ pour première phrase et $3x + 6y = 24$ pour la seconde.
Le couple $(x ; y)$ est donc solution du système du **1.**.
On a donc $x = 1$ et $y = 3{,}5$.
Un sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées serait vendu $4x + 3y$, soit $4 \times 1 + 3 \times 3{,}5$.
Un sac contenant 4 perles noires et 3 perles dorées serait vendu 14,50 euros.

5 **a.** On veut résoudre : $\begin{cases} 10x - 3y = 35 & (1) \\ 5x - 4y = -20 & (2) \end{cases}$.
En multipliant dans (2) par 2, on a $\begin{cases} 10x - 3y = 35 & (1) \\ 10x - 8y = -40 & (3) \end{cases}$.
(1) − (3) donne $5y = 75$, soit $y = 75 \div 5 = 15$.
(1) donne alors $10x - 3 \times 15 = 35$.
On a $10x = 35 + 45$, soit $x = 80 \div 10$. On obtient $x = 8$.
La solution $(x ; y)$ est $(8 ; 15)$.

b. On veut résoudre : $\begin{cases} 5x + 2y = 13{,}5 & (1) \\ 3x + 6y = 22{,}5 & (2) \end{cases}$.
En multipliant dans (1) par 3, on a :
$$\begin{cases} 15x + 6y = 40{,}5 & (3) \\ 3x + 6y = 22{,}5 & (2) \end{cases}.$$
(3) − (2) donne $12x = 18$, soit $x = 18 \div 12 = 1{,}5$.
(1) donne alors $5 \times 1{,}5 + 2y = 13{,}5$.
On a $2y = 13{,}5 - 7{,}5$, soit $y = 6 \div 3$.
On obtient $y = 2$. **La solution $(x ; y)$ est $(1{,}5 ; 2)$.**

6 **1.** Soit x le prix d'un pain aux raisins et y celui d'un croissant. On veut $\begin{cases} 5x + 3y = 5{,}85 & (1) \\ 3x + 2y = 3{,}65 & (2) \end{cases}$.
2. En multipliant les deux membres de (1) par 2 et les deux membres de (2) par 3, on a $\begin{cases} 10x + 6y = 11{,}70 & (3) \\ 9x + 6y = 10{,}95 & (4) \end{cases}$.
En soustrayant membre à membre (4) de (3), on a $x = 0{,}75$. En reprenant (1), on a $5 \times 0{,}75 + 3y = 5{,}85$,
soit $3y = 5{,}85 - 3{,}75$.
On fait $y = 2{,}10 \div 3$. On obtient $y = 0{,}70$.
Un pain aux raisins coûte 0,75 euro et un croissant 0,70 euro.