BIRAPPORT

1. Birapport de quatre nombres

On appelle birapport des quatre nombres a, b, c et d placés dans cet ordre la quantité notée (a, b, c, d) telle que : $(a, b, c, d) = \frac{c-a}{c-b} \div \frac{d-a}{d-b}$

Propriétés :

Si (a, b, c, d) = k, alors, $(a, b, d, c) = \frac{1}{k}$ et $(a, c, b, d) = (d, b, c, a) = 1 - k$

A l'aide de ces relations, on peut déterminer le birapport d'une permutation quelconque des quatre nombres (a, b, c, d).

2. Birapport de quatre points alignés

On appelle birapport des quatre points alignés A, B C et D placés dans cet ordre le birapport de leurs abscisses. On le note (A, B, C, D).

$$(A, B, C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

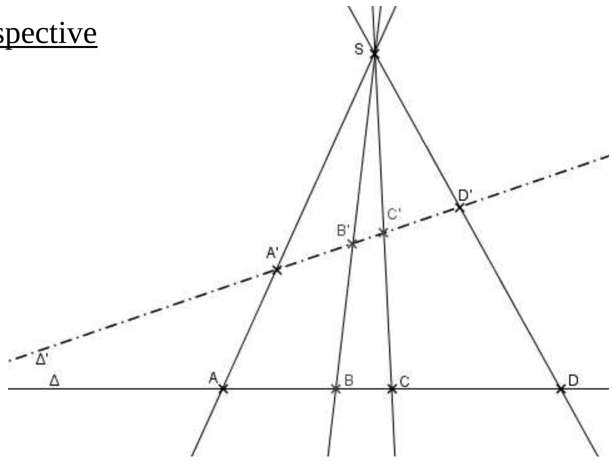
Cas particulier

Le quadruplet (A, B, C, D) de quatre points alignés est une division harmonique si $(A, B, C, D) = -1$

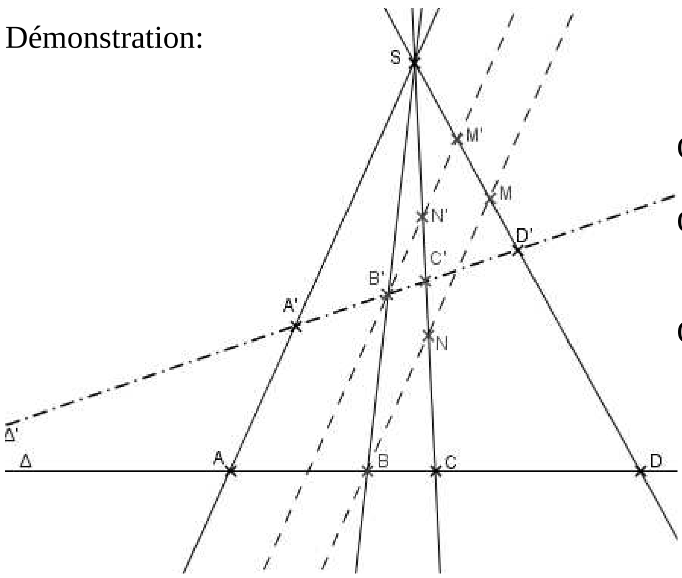
Théorème de conservation du birapport par une perspective

Si A, B, C et D sont quatre points alignés sur une droite Δ et S est un point extérieur à Δ ; si Δ' est une droite qui coupe les droites (SA), (SB), (SC) et (SD) respectivement en A', B', C' et D', alors

(A, B, C, D) = (A', B', C', D')



Démonstration:



On trace la parallèle à (SA) passant par B : elle coupe (SC) en N et (SD) en M.

On trace la parallèle à (SA) passant par B' : elle coupe (SC) en N' et (SD) en M'.

On applique le théorème de Thalès dans les triangles SAC et SAD :

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{SA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

alors, (A, B, C, D) = $\frac{\overline{SA}}{\overline{NB}} \div \frac{\overline{SA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{NB}}$

On montrerait de même que (A’, B’, C’, D’) = $\frac{\overline{M'B'}}{\overline{N'B'}}$.

En considérant l’homothétie de centre S qui transforme M en M’
N en N’
B en B’

on peut en déduire que $\frac{\overline{MB}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{M'B'}}{\overline{N'B'}}$, donc (A, B, C, D) = (A’, B’, C’, D’).

Si les quatre droites sont parallèles, il suffit d’appliquer le théorème de Thalès.

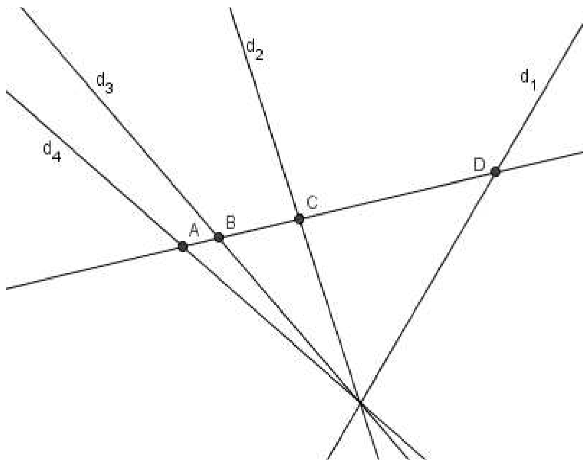
Si les quatre droites sont parallèles, il suffit d’appliquer le théorème de Thalès

3→Birapport de quatre droites concourantes ou parallèles

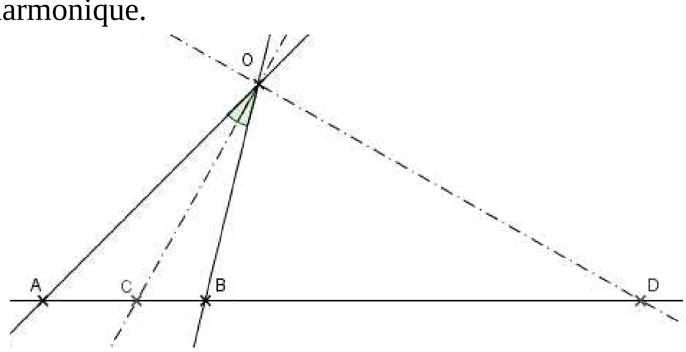
On définit le birapport de quatre droites concourantes ou parallèles par le birapport de leurs quatre points d’intersection par une droite quelconque.

On note :
(d_1, d_2, d_3, d_4) = (A, B, C, D)

Si la division (A, B, C, D) est harmonique, alors, le faisceau des quatre droites est appelé faisceau harmonique.



Exemple : on peut montrer que le faisceau formé par deux droites et leurs bissectrices est harmonique.



On considère un triangle ABO,
sa bissectrice intérieure [OC)
sa bissectrice extérieure [OD) qui est perpendiculaire à [OC).

((OA), (OB), (OC), (OD)) = -1

3. Parallèles et points à l’infini

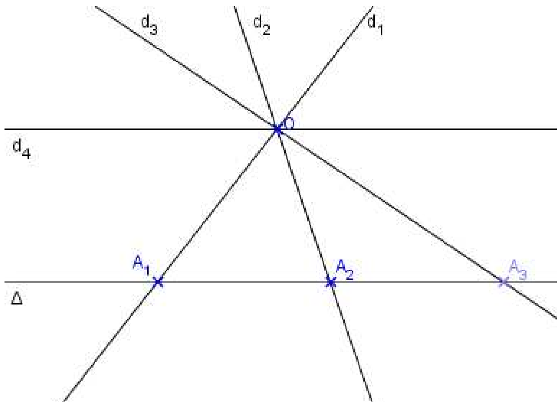
On reprend la démonstration du théorème de conservation du birapport par une perspective.

$$(A, B, C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

Si B est fixe et A tend vers l'infini, $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ tend vers 1.

Etant donné une droite, on peut donc introduire son point à l'infini avec la convention que le rapport de deux segments ayant l'infini comme extrémité est 1.

<u>Cas du faisceau harmonique</u>



Soient quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 concourantes en un point O et de birapport égal à -1; elles forment un faisceau harmonique.

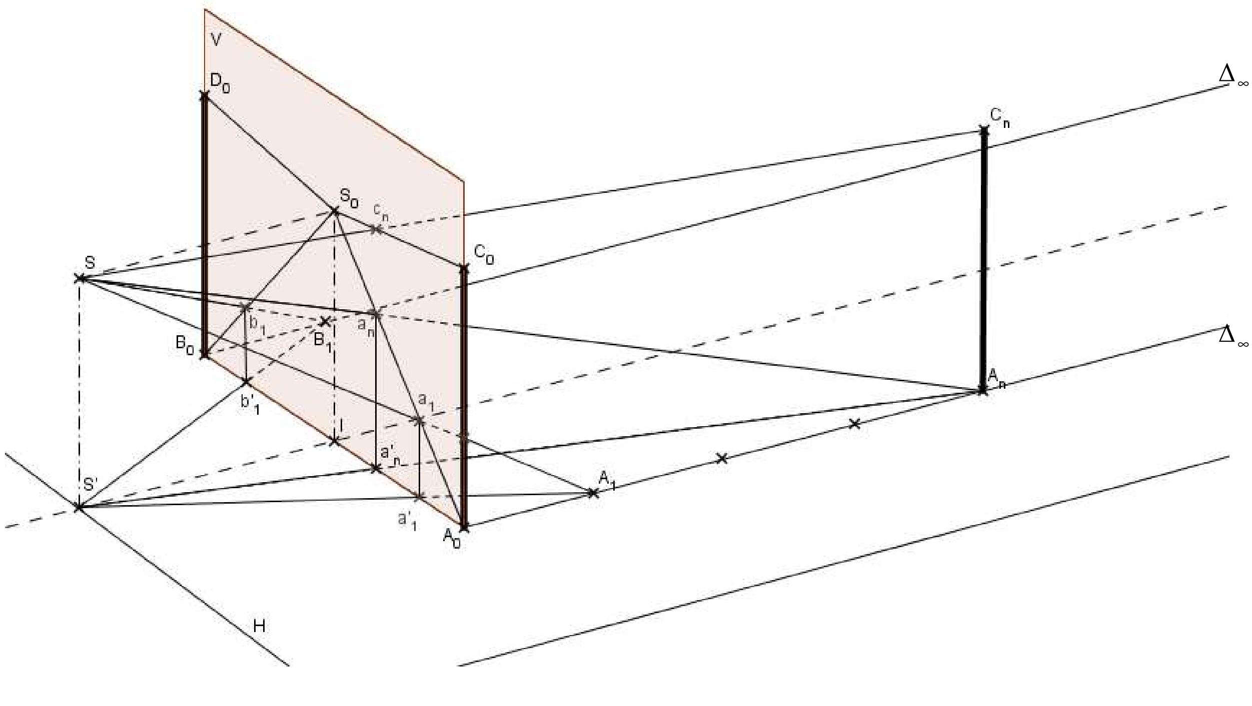
> <u>Théorème</u> : Si on coupe un faisceau harmonique par une parallèle à l'un de ses rayons, les points d'intersection avec les autres rayons sont tels que l'un est le milieu des deux autres.

(Δ) est parallèle à d_4 et coupe les droites d_1 en A_1, d_2 en A_2 et d_3 en A_3.

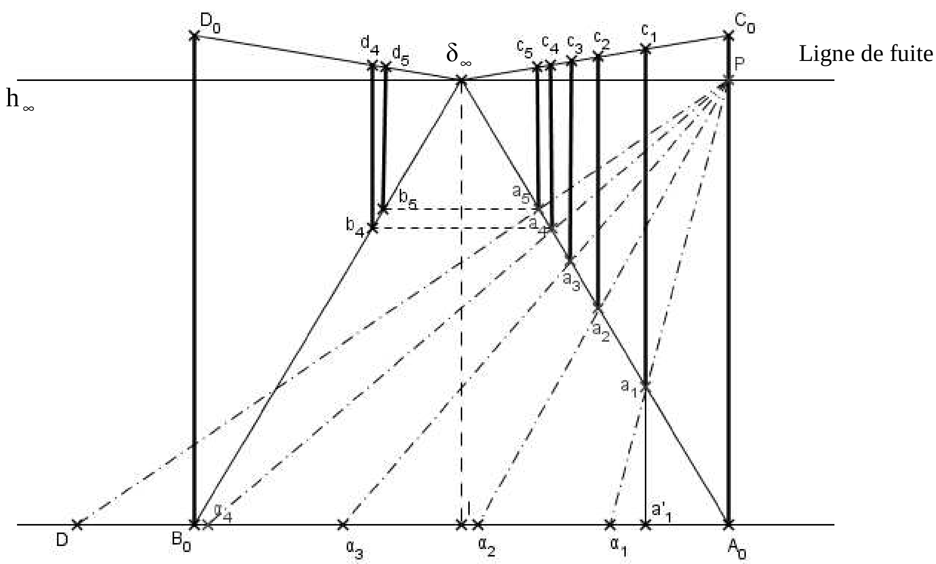
Alors, $A_1A_2 = A_2A_3$

4. **<u>Perspective d'une colonnade</u>**

On veut représenter en perspective une allée bordée de colonnes régulièrement espacées. Les propriétés de la transformation permettent des constructions simples.



L'allée est dans un plan horizontal (H) limitée par deux demi-droites parallèles $(A_0\Delta_\infty)$ et $(B_0\Delta_\infty)$
On considère les points $A_1, A_2 ... A_n$ et $B_1, B_2 ... B_n$ de chacune de ces demi-droites, avec
$A_0A_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$ et $B_0B_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B_n$.
Les colonnes sont supposées verticales et de même longueur.
La perspective est définie par son sommet S, situé au dessus de (H) à une certaine distance (la projection de S sur (H) est au milieu de l'allée) et par son plan (V) perpendiculaire aux droites $(A_0\Delta_\infty)$ et $(B_0\Delta_\infty)$.
Les sommets des colonnes issues de A_n et B_n sont appelés respectivement C_n et D_n.
Représentation du plan (V) :



Pour tout n, le point A_{n+1} est le milieu de $[A_n\ A_{n+2}]$, donc la division $(A_n, A_{n+2}, A_{n+1}, \Delta_\infty)$ est harmonique. La perspective conservant le birapport, la division $(a_n, a_{n+2}, a_{n+1}, \delta_\infty)$ des points transformés sera harmonique.
Dans le plan (V), la droite (h_∞) est la transformée de la droite à l'infini du plan (H). Les droites parallèles $(A_0\Delta_\infty)$, $(B_0\Delta_\infty)$, (C_0C_n), (D_0D_n) sont transformées en $(A_0\delta_\infty)$, $(B_0\delta_\infty)$, $(C_0\delta_\infty)$ et $(D_0\delta_\infty)$ concourantes en δ_∞ (qui est la transformée du point à l'infini Δ_∞ de la direction considérée).
Alors, (h_∞) est parallèle à (A_0B_0), $I\delta_\infty = SS'$, et I est le milieu de $[A_0B_0]$.
Soit P un point de h_∞. Le faisceau de droites $((Pa_n),(Pa_{n+2}),(Pa_{n+1}),(P\delta_\infty))$ est harmonique . Son intersection avec une parallèle à l'un des rayons est telle que l'un des points est à l'infini, un autre est milieu du segment défini par les deux derniers points. Si α_n est l'intersection de (Pa_n) avec (A_0B_0), alors α_{n+1} sera le milieu du segment $[\alpha_n, \alpha_{n+2}]$.
Il suffit alors de déterminer la position de a_1 sur $(A_0\delta_\infty)$ pour pouvoir construire tous les points a_n.
Si on pose d = S'I et $A_n\ A_{n+1} = \lambda$ et en considérant des triangles semblables, on a

$$\frac{A_0a_1}{A_0\delta_\infty} = \frac{A_0a'_1}{A_0I} = \frac{\lambda}{d+\lambda}.$$

On peut donc placer a_1 sur $(A_0\delta_\infty)$, puis les points α_n tels que $\overline{A_0\alpha_n} = n\,\overline{A_0\alpha_1}$ …..

Une droite parallèle au plan (V) se transformant en une droite parallèle à la première, on peut alors construire les points b_n, c_n,…car $(a_n b_n) // (A_0 B_0)$, $(a_n c_n) // (A_0 C_0)$,…