L’image et le relief

Reconstituer le relief

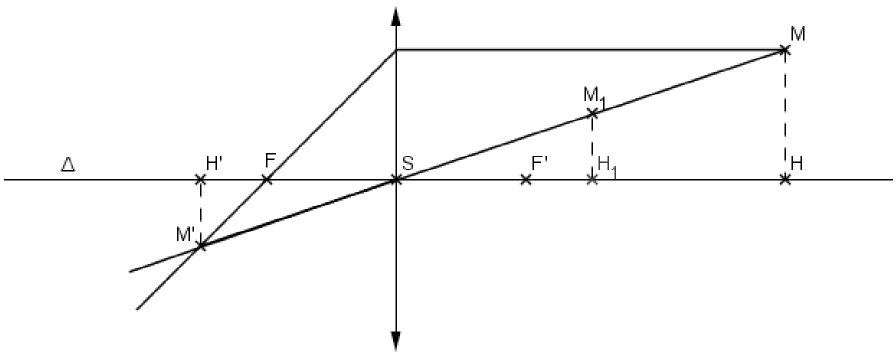
Quand un individu pourvu de deux yeux en bon état regarde un paysage, il est capable d’évaluer les distances qui le séparent des différents éléments de ce paysage.
On examine ensuite une photographie de la même scène. En considérant les tailles sur l’image des différents éléments , leurs emplacements, il est certes possible de savoir, qualitativement, s’ils sont plus ou moins éloignés de l’objectif de l’appareil de prise de vues, mais il devient impossible d’évaluer des distances. On peut certes en avoir une idée pour certains éléments, car le cerveau compare leur taille sur l’image avec la taille réelle telle que la mémoire l’a enregistrée, mais pour de nombreux usages cela est insuffisant.

La photographie d’une scène, d’un paysage est plus pauvre que la vision, car elle rend très mal compte du relief. Or, pour des besoins esthétiques (montrer une vue en relief) ou professionnels, on a cherché à reconstituer le relief à l’aide de la photographie. La photographie en relief, comme un plus par rapport à l’image dite à plat, a eu un moment de vogue, elle existe encore mais est marginale actuellement. Par contre, les usages professionnels sont variés et divers. Citons-en quelques-uns :

- L’institut géographique national (IGN) publie des cartes où le relief est figuré à l’aide de courbes de niveau et on utilise des photographies aériennes pour les confectionner, il faut donc reconstituer le relief.
- Un chirurgien explique à ses élèves les difficultés d’une opération. Il lui faut une image en relief pour montrer clairement où les instruments doivent passer, quelles sont les erreurs à ne pas commettre.
- En infographie, il faut que l’ordinateur puisse calculer les distances entre les différents éléments d’un paysage qui est photographié. On peut, sur une image classique, calculer deux coordonnées d’un élément ; pour la troisième il est nécessaire de reconstituer le relief.
- Pour réaliser le fac-similé de la grotte de Lascaux et d’autres monuments, on utilise des photographies. Elles permettent de reconstituer le décor peint, mais, pour reproduire le modelé de la paroi rocheuse, il faut avoir une représentation de son relief.

La formation des images

En première approximation, un appareil photographique est un instrument servant à obtenir des images réelles par l'intermédiaire d'un objectif assimilable à une lentille convergente parfaite. Considérons une telle lentille de centre S, d'axe Δ perpendiculaire à son plan et de foyers F et F'.



Tout rayon lumineux parallèle à Δ est dévié par la lentille et, à la sortie de la lentille, passe par F ; tout rayon lumineux frappant la lentille en son centre S n'est pas dévié.
Soit M un point de l'espace n'appartenant pas à Δ, H sa projection orthogonale sur Δ, M' et H' leurs images respectives par la lentille.
Les deux règles précédentes permettent de construire une représentation géométrique (figure ci-dessus).
Si on considère les longueurs SF = SF' = f ; SH = p et SH' = SH_1 = p'
on peut facilement démontrer que $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$
On remarque que si p est grand devant f, alors p' est proche de f ; et à la limite, si p est infini, alors p' = f.
Tous les rayons lumineux issus de M sont supposés, après traversée de la lentille, converger en M, ce qui fait que M' est image de M. Pour recueillir cette image, on place un capteur qui peut être représenté comme une portion d'un plan (π) parallèle au plan de la lentille et passant par M'. Le plan de la lentille divise l'espace en deux demi-espaces, un point N situé dans le même demi-espace que M aura une image en N' qui ne sera pas dans (π) mais proche de lui dès lors qu'il appartient à une certaine portion du demi-espace. Sur le capteur, au lieu d'un point, on aura une tache dont le diamètre sera inférieur au seuil de détection et qui sera assimilée à un point.
Pour étudier la transformation géométrique qui fait passer d'un paysage à une image, on considère le symétrique de l'image par rapport au centre S de la lentille, donc pour la figure ci-dessus ce qui fait passer de M à M_1.

La perspective

1. Définition

Soient un plan (P) qui sépare l'espace en deux demi-espaces et un point S situé dans l'un des deux demi-espaces. Pour tout point M situé dans l'autre demi-espace, on considère la droite (SM) qui rencontre le plan (P) en M_1.

M_1 est appelé image de M par la perspective de centre S et de plan (P).

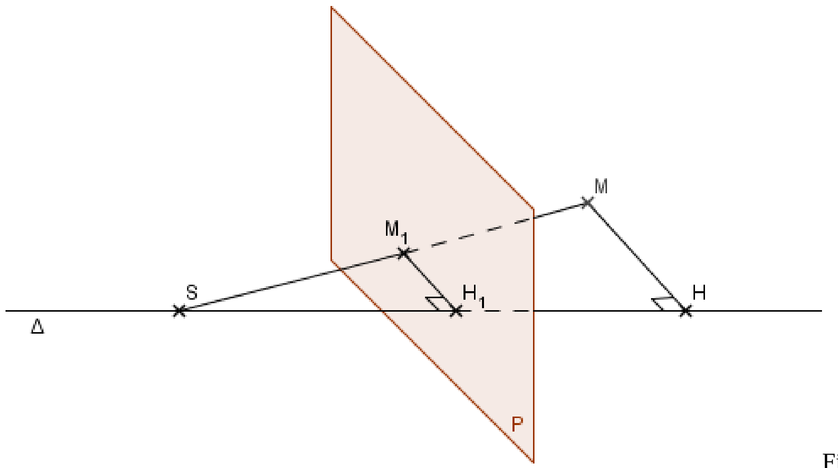


Figure 1

Δ est la droite passant par S et perpendiculaire à (P), H et H_1 les projections orthogonales de M et M_1 sur Δ.

Le symétrique de l'image photographique par rapport au centre S de l'objectif réalise une perspective du paysage situé devant, cette transformation permet d'étudier l'image.

Le langage adéquat pour la décrire est celui de la géométrie projective.

Dans un espace projectif, deux droites coplanaires ont toujours une intersection, il n'y a pas de parallèles. Dans l'espace euclidien on munira une droite (D) quelconque d'un point à l'infini noté D_∞, les droites parallèles à (D) seront supposées concourir en D_∞. L'ensemble des points à l'infini forme le plan infini.

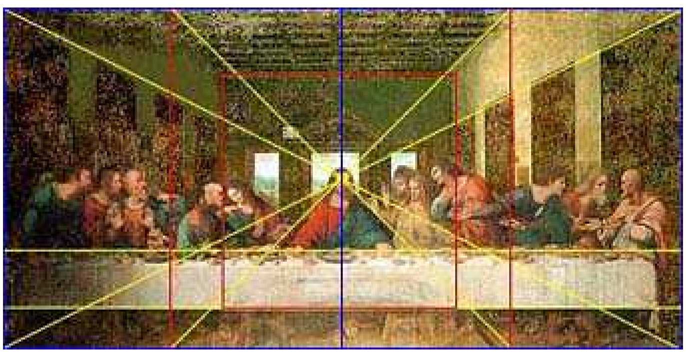
2. Propriétés

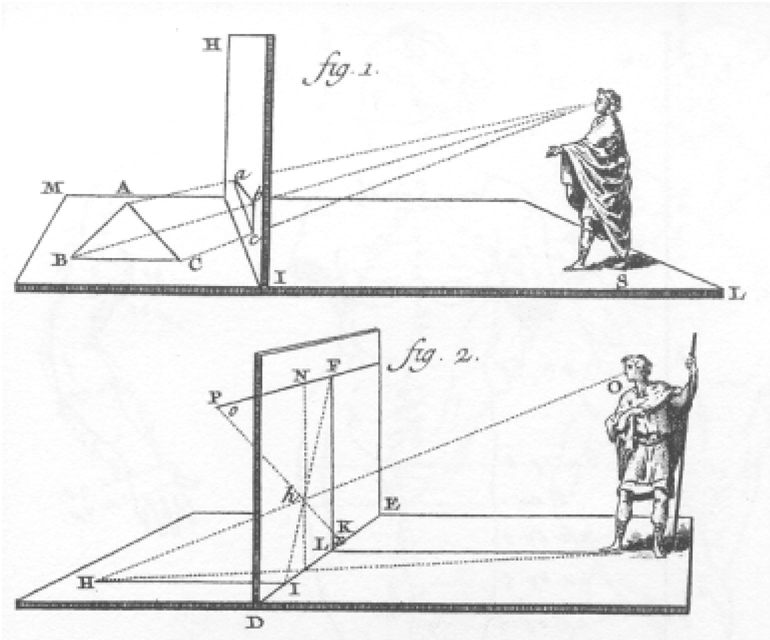
La vision par un œil est analogue à une image photographique et réalise donc une perspective du paysage observé.

Bien avant l'invention de la photographie, des peintres ont voulu, sur leurs tableaux, restituer la vision et ont réalisé des perspectives.

Pour rendre compte des propriétés de cette transformation ils ont utilisé, par exemple, des plaques de verre (cf .certaines planches de l'encyclopédie de Diderot et d'Alembert).

Le célèbre tableau de Léonard de Vinci, La Cène, permet d'observer les propriétés de la perspective.





Encyclopédie de Diderot et d'Alembert. Fig. 1 : Un triangle ABC dessiné sur le sol se projette en abc sur une vitre transparente verticale coupant le cône visuel du spectateur qui regarde le triangle. Fig. 2 : La construction de l'image h (sur la vitre) du point H (au sol) regardé par le spectateur.

<u>Propriété 1</u>

Tout faisceau de droites concourantes (ou parallèles) est transformé en un faisceau de droites concourantes (ou parallèles).

<u>Propriété 2</u>

La perspective conserve le birapport.

Pour la démonstration cf. l'article sur le birapport

<u>Application</u> : Soient (D) une droite de l'espace et trois points A, B et M tels que M est le milieu de [AB]. a, b et m sont les transformés des points A, B et M et d_∞ est le transformé du point à l'infini de (D). Alors, la division (a, b, m, d_∞) est harmonique : $(a, b, m, d_\infty) = -1$

<u>Propriété 3</u>

Toute conique est transformée en une conique.

<u>Application</u> : Un cercle dans un plan de l'espace sera transformé en une ellipse.

Deux perspectives pour reconstituer le relief

Une perspective transforme l'espace à trois dimensions en un plan. Pour restituer un relief, calculer des distances, il faut comparer deux perspectives. La photographie en relief ou stéréoscopie, le télémètre des géomètres, le cerveau exploitant la vision binoculaire utilise le procédé.

Considérons un plan (H) faisant partie du paysage et deux perspectives de sommets S_1 et S_2 et de plan (V).
Les plans (H) et (V) se coupent suivant une droite (D), la droite $(S_1 S_2)$ est supposée être parallèle à (D) et incluse dans (H). La droite (D) est l'image de (H) dans les deux perspectives.
Soit M un point de (H) et m_1 et m_2 ses images dans les deux perspectives, s_1 et s_2 les projections orthogonales de S_1 et S_2 sur (D).

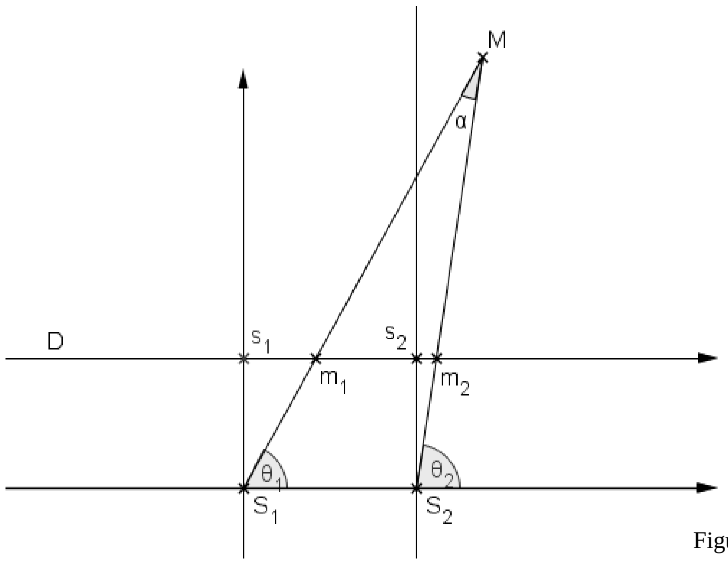


Figure 2

Le plan (H) est muni d'un repère orthogonal $(S_1, \overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_1s_1})$.
On pose : $S_1 s_1 = S_2 s_2 = f$
$S_1 S_2 = s_1 s_2 = e$
(x_M, y_M) sont les coordonnées de M .
$\overline{s_1 m_1} = x_1$ est l'abscisse de m_1 dans l'image induite par la première perspective.
$\overline{s_2 m_2} = x_2$ est l'abscisse de m_2 dans l'image induite par la deuxième perspective.
x_1 et x_2 peuvent être mesurées sur les deux photographies.

Un calcul simple montre que

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{f}{y_M} x_M \\ x_2 = \dfrac{f}{y_M}(x_M - e) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = e \, \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} \\ y_M = f \, \dfrac{e}{x_1 - x_2} \end{cases}$$

Il suffit pour cela d'exprimer de deux façons différentes $\tan \theta_1$ et $\tan \theta_2$.
L'angle $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ sous lequel le point M voit le segment $[S_1 S_2]$ est appelé **parallaxe**.

On a $\tan \alpha = f \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 + f^2} = e \dfrac{y_M}{x_M^2 + y_M^2 - e x_M}$.

Les quantités f et e caractérisent les deux perspectives, la comparaison des positions des deux points images d'un point de l'espace permet de reconstituer sa position dans l'espace.

La vision binoculaire

La vision binoculaire permet à un observateur de reconstituer le relief, au moins jusqu'à une certaine distance, d'évaluer la distance séparant deux objets du paysage.
En première approximation l'œil droit fabrique une image sur sa rétine qui est une perspective, il en est de même pour l'œil gauche. Le cerveau interprète les différences entre ces deux perspectives, ce qui permet une perception du relief.

Dans la suite les angles seront exprimés en radians. L'œil est évidemment soumis à des limitations, on ne peut pas tout percevoir. On va distinguer deux types d'acuité visuelle.

Acuité visuelle monoculaire

A une distance donnée de l'observateur il n'est pas possible de distinguer deux objets trop proches l'un de l'autre. Considérons deux objets M et N situés à une distance D de l'observateur situé en O. Ils seront distinguables si $\widehat{MON} \geq \frac{1}{2000}$

$\frac{1}{2000}$ rad est l'acuité visuelle monoculaire.

Acuité visuelle stéréoscopique

On regarde deux objets ponctuels M et N avec les deux yeux distinguables situés respectivement à la distance D_M et D_N de l'observateur. Jusqu'où peut-on percevoir et donc évaluer la quantité $D_N - D_M$ supposée positive ?

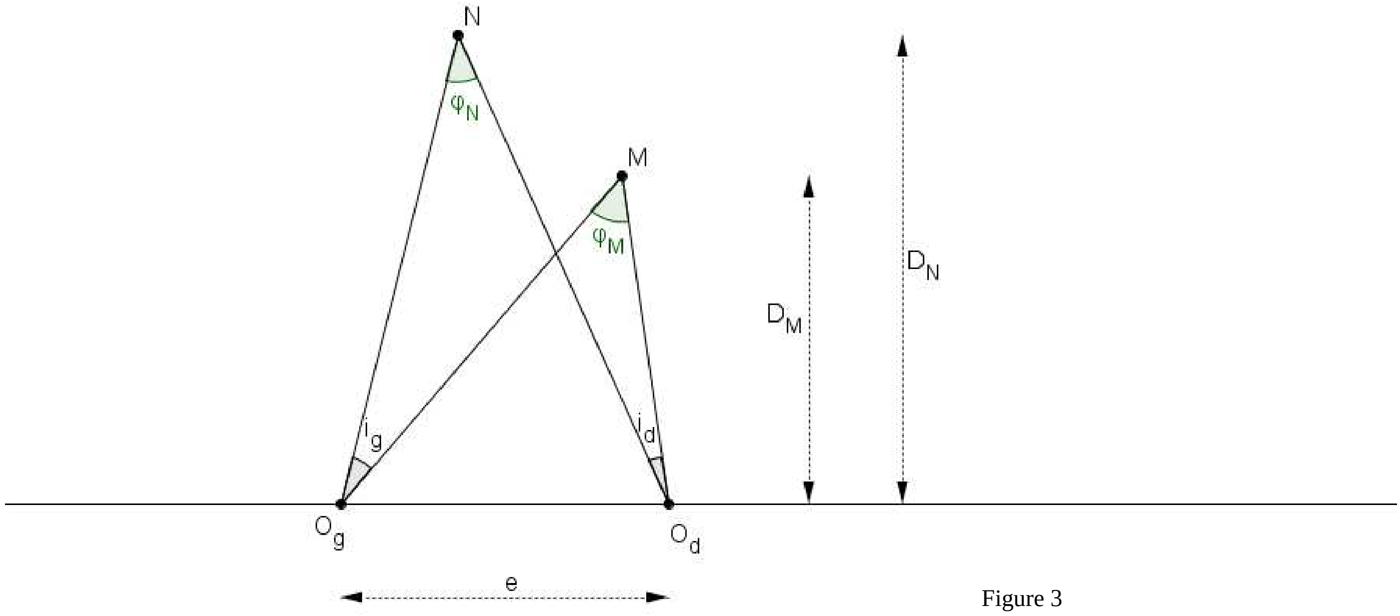


Figure 3

O_g et O_d représentent respectivement les centres des cristallins des yeux gauche et droit,
e est l'intervalle inter pupillaire,

φ_M et φ_N sont les parallaxes des points M et N

i_g et i_d sont les angles sous lesquels on perçoit les points M et N des yeux gauche et droit.

On a : $\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N = i_g - i_d$

Les expériences faites montrent qu'un observateur est surtout sensible à la différence $\varphi_M - \varphi_N$; elle est perçue quand $\Delta\varphi \geq \frac{1}{10\,000}$.

$\frac{1}{10\,000}$ rad est l'acuité visuelle stéréoscopique, elle est beaucoup plus faible que l'acuité visuelle monoculaire.

Posons e la distance inter pupillaire séparant les deux yeux. En moyenne e = 0,064 mètres.

On distinguera l'objet M de l'infini, quand M est dans l'axe des yeux, si $\frac{e}{D_M} \geq \frac{1}{10\,000}$ soit $D_M \leq 640$ mètres.

Approximativement, on a $\varphi_M \approx \frac{e}{D_M}$, donc si $D_N = D_M + \Delta D$,

alors, $\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_N \approx \frac{e}{D_M} - \frac{e}{D_N} = \frac{e.\Delta D}{D_N(D_M + \Delta D)} \approx \frac{e.\Delta D}{D_M^2}$

Donc une différence de distance ΔD entre deux points de l'espace dont l'un est situé à la distance D sera perçue si $\Delta D \geq \frac{D^2}{e} \times \frac{1}{10\,000}$

Pour D = 1, on trouve $\Delta D \geq 0{,}0016$ mètres

Pour D = 100, on trouve $\Delta D \geq 16$ mètres.

La photographie en relief

1. Reconstituer le relief tel qu'il est perçu

Si on veut qu'un individu puisse reconstituer le relief en examinant deux clichés, il faut que chaque œil puisse percevoir celui qui aurait correspondu à sa vision du paysage. A la prise de vue, on prend deux photographies avec une distance entre les objectifs égale à l'intervalle inter pupillaire soit 6,4 centimètres.

Pour l'examen du couple, il faut fournir à chaque œil l'image qui lui convient et lui cacher l'autre, ce qui nécessite un appareil adapté. Les procédés les plus courants sont la visionneuse avec cloison, les anaglyphes, la projection en lumière polarisée.

La visionneuse est munie de deux oculaires faisant office de loupes, distants de 6,4 centimètres, situés en S_1 et S_2.
On place l'œil gauche en S_1 et l'œil droit en S_2.
A la distance f des oculaires on place les deux photographies.

On est dans la situation de la figure 3 mais les yeux ont remplacé les objectifs photographiques dont la distance focale est f. Une cloison située au milieu de l'appareil cache à un œil la photographie qui ne lui est pas destinée. Ainsi celui qui examine le couple de photographies se trouve dans la situation de celui qui a pris les clichés.

Intuitivement, son cerveau effectue les calculs : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} \\ y_M = f\dfrac{e}{x_1 - x_2} \end{cases}$

Le second procédé est connu sous le nom d'**anaglyphes**. Les deux clichés, en principe en noir et blanc, sont coloriés, le gauche en rouge et le droit en bleu et superposés sur le même support : feuille de papier, écran d'ordinateur. L'observateur se munit de lunettes où le verre gauche est rouge et le verre droit est bleu. Chaque œil voit l'image qui lui est destinée et le relief peut apparaître. De temps à autre, des revues, (surtout celles dites de charme !), publient de tels photographies et fournissent les lunettes ad hoc.

Le troisième procédé utilise les propriétés de **la lumière polarisée**. On projette les deux images sur un même écran. L'image pour l'œil gauche est polarisée dans une certaine direction, celle pour l'œil droit dans une direction perpendiculaire. En chaussant des lunettes équipées de filtres polarisés on rend l'image pour un œil visible pour celui-ci, invisible pour l'autre. Les images projetées peuvent être des diapositives argentiques ou des images numériques.

2. Quelques effets spéciaux

Reprenons les formules reliant les coordonnées dans un plan (H) d'un point M et les coordonnées de ses transformés par les perspectives de sommets S_1 et S_2 et de plan (V) où la droite $(S_1 S_2)$ dans le plan (H) est parallèle à la droite (Δ) intersection de (H) et de (V).

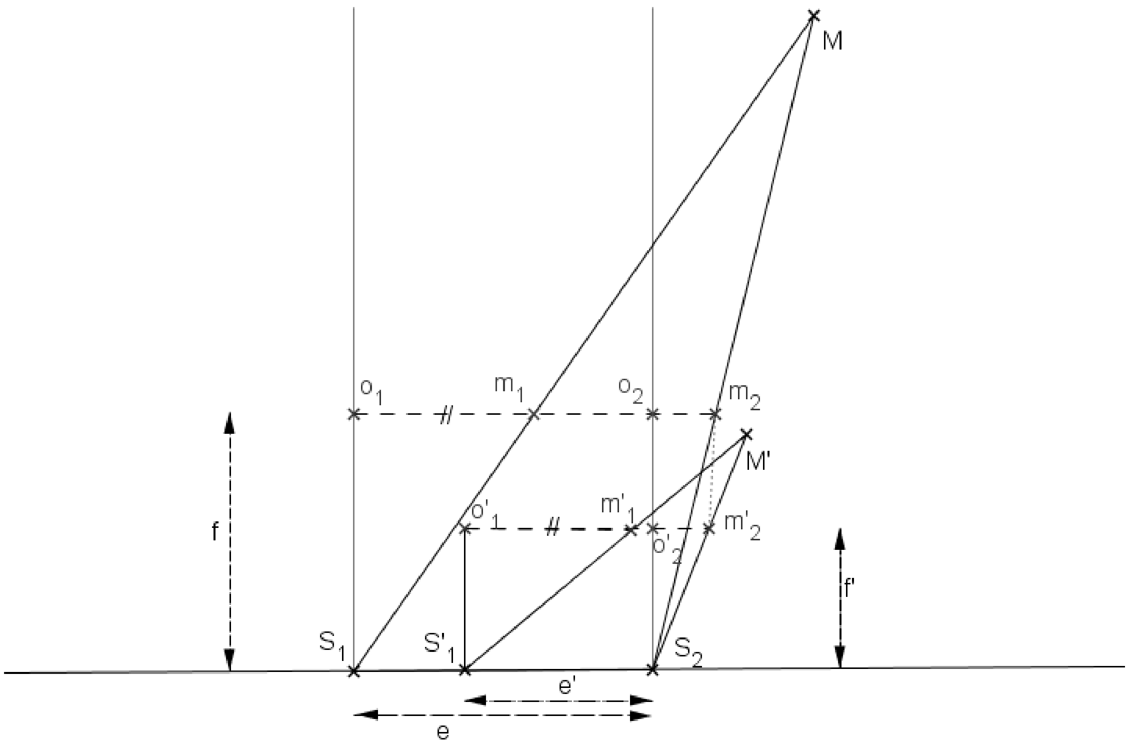
Supposons que dans la visionneuse les images soient examinées avec un écart e’ entre les deux sommets des perspectives à une distance f’ différente de la focale f de prise de vues.
Pour l’observateur du couple de photographies l’image du point M sera en M’ dont les coordonnées sont x'_M et y'_M et sont calculables.

On a : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{f}{y_M} x_M \\ x_2 = \dfrac{f}{y_m}(x_M - e) \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{M'} = e' \dfrac{x_1}{x_1 - x_2} \\ y_{M'} = f' \dfrac{e}{x_1 - x_2} \end{cases}$

Il en résulte :

$$\begin{cases} x_{M'} = \dfrac{e'}{e} x_M \\ y_{M'} = \dfrac{f'}{f} \times \dfrac{e'}{e} y_M \end{cases}$$

Si e’<< e et même avec f’ > f, le point M’ paraît plus proche que le point M, le relief est exagéré même s’il est « plus aplati » que dans la réalité. C’est ainsi que par photographie aérienne on peut reconstituer le relief alors que celui-ci ne serait pas perceptible compte tenu des limites de l’acuité visuelle. On prend souvent e égal à 100 mètres alors que e’ est toujours égal à 6,4 centimètres.
La figure ci-dessous montre qu’une construction géométrique simple peut rendre compte du phénomène.



Sur la figure, on a : $o_1 m_1 = o'_1 m'_1 = x_1$
$o_2 m_2 = o'_2 m'_2 = x_2$