Les Fractales

Olympiades mathématiques 2016

Thomas Gauthier

Maître de Conférence au LAMFA, UMR-CNRS 7352,
Université de Picardie Jules Verne

le 06 juin 2016

Petit historique

Petit historique

- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,

Petit historique

- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,

Petit historique

- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,
- Vrai départ dans les années 1960 : *Mandelbrot* et les mathématiques financières,

Petit historique

- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,
- Vrai départ dans les années 1960 : *Mandelbrot* et les mathématiques financières,

Petit historique

- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,
- Vrai départ dans les années 1960 : *Mandelbrot* et les mathématiques financières,
- Développement de la théorie dans les années 1980 : *Douady*, *Hubbard*, *Falconer*, *Yoccoz*, ...

Petit historique

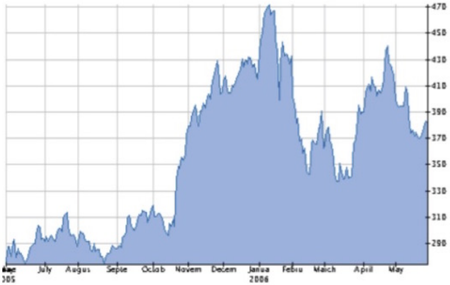
- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,
- Vrai départ dans les années 1960 : *Mandelbrot* et les mathématiques financières,
- Développement de la théorie dans les années 1980 : *Douady*, *Hubbard*, *Falconer*, *Yoccoz*, ...

Petit historique

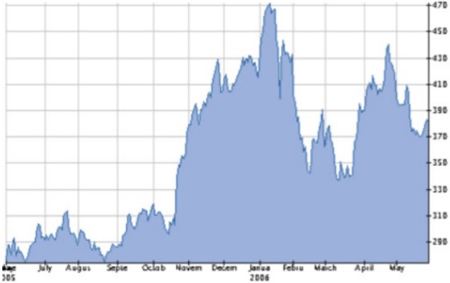
- Premiers exemples entre 1910 et 1920 : *Fatou* et *Julia*,
- Vrai départ dans les années 1960 : *Mandelbrot* et les mathématiques financières,
- Développement de la théorie dans les années 1980 : *Douady*, *Hubbard*, *Falconer*, *Yoccoz*, ...
- Aujourd'hui : théorie bien comprise et des applications nombreuses :
  - mathématiques financières,
  - mesures des côtes maritimes,
  - murs anti-bruits efficaces,
  - dépistage de cancers, etc...

L’observation de Mandelbrot

L’observation de Mandelbrot

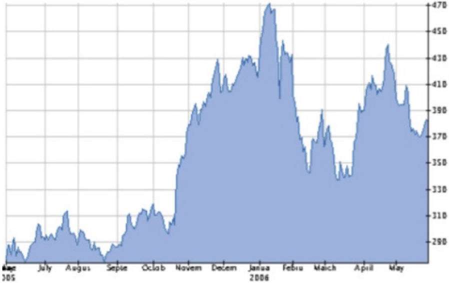


L’observation de Mandelbrot



La courbe est *très irrégulière*.

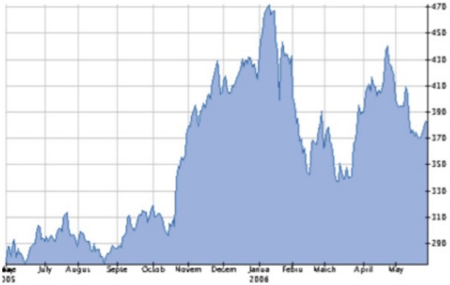
L'observation de Mandelbrot



La courbe est *très irrégulière*.

Elle "se ressemble à toutes les échelles".

L’observation de Mandelbrot



La courbe est *très irrégulière*.

Elle “se ressemble à toutes les échelles”. On dira qu’elle est *auto-similaire*.

Qu'est-ce qu'une fractale ?

Qu’est-ce qu’une fractale ?

Mandelbrot n’a jamais voulu donner de définition précise, qui serait trop restrictive.

Qu’est-ce qu’une fractale ?

Mandelbrot n’a jamais voulu donner de définition précise, qui serait trop restrictive.

“Une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel qui combine les caractéristiques suivantes :

Qu’est-ce qu’une fractale ?

Mandelbrot n’a jamais voulu donner de définition précise, qui serait trop restrictive.

“Une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel qui combine les caractéristiques suivantes :

1. Toutes ses parties ont la même structure que le tout, à ceci près qu’elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées : elle est auto-similaire,

Qu’est-ce qu’une fractale ?

Mandelbrot n’a jamais voulu donner de définition précise, qui serait trop restrictive.

“Une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel qui combine les caractéristiques suivantes :

1. Toutes ses parties ont la même structure que le tout, à ceci près qu’elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées : elle est auto-similaire,
2. sa forme est extrêmement irrégulière ou fragmentée, et le reste à toute les échelles ;

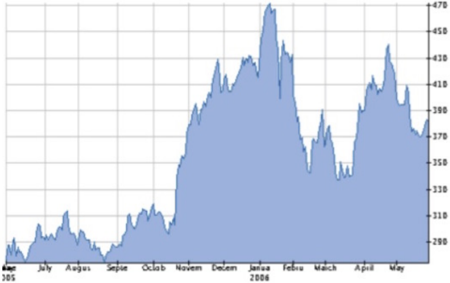
Qu’est-ce qu’une fractale ?

Mandelbrot n’a jamais voulu donner de définition précise, qui serait trop restrictive.

“Une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel qui combine les caractéristiques suivantes :

1. Toutes ses parties ont la même structure que le tout, à ceci près qu’elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées : elle est auto-similaire,
2. sa forme est extrêmement irrégulière ou fragmentée, et le reste à toute les échelles ;
3. Elle contient des éléments discernables dans une large gamme d’échelles.”

Quelques exemples



L'évolution d'une valeur cotée en bourse

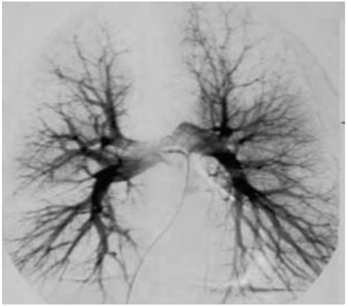
Quelques exemples

Un chou romanesco

Quelques exemples

Zoom sur un chou romanesco

Quelques exemples



Une radio de poumons humains

Quelques exemples

Un flocon de neige

Quelques exemples

Une feuille de fougère

Quelques exemples

Un oursin (sans les épines)

Les poussières de Cantor

Les poussières de Cantor

Cantor : mathématicien du XIXième siècle.
Il a révolutionné la théorie des ensembles.

Les poussières de Cantor

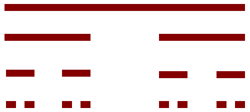
Cantor : mathématicien du XIXième siècle.
Il a révolutionné la théorie des ensembles.

Les poussières de Cantor

L'ensemble de Cantor se contruit par *itération* : on répète une infinité de fois un opération donnée.

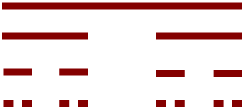
Les poussières de Cantor

L’ensemble de Cantor se contruit par *itération* : on répète une infinité de fois un opération donnée.



Les poussières de Cantor

L’ensemble de Cantor se contruit par *itération* : on répète une infinité de fois un opération donnée.



A la fin il ne reste qu’un nuage de poussières de longueur nulle.

Le tapis de Sierpinski

Le tapis de Sierpinski

Sierpinski : mathématicien du XXième siècle : il a poursuivi l'œuvre de Cantor.

Le tapis de Sierpinski

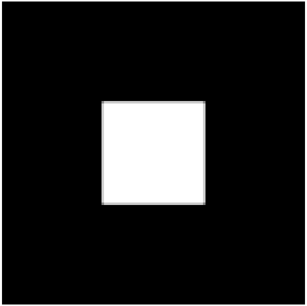
Sierpinski : mathématicien du XXième siècle : il a poursuivi l'œuvre de Cantor.

Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :

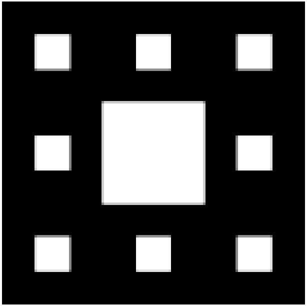
Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :



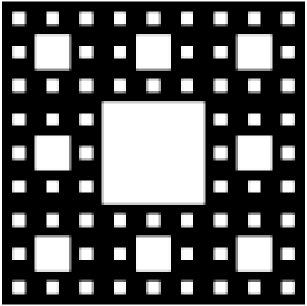
Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :



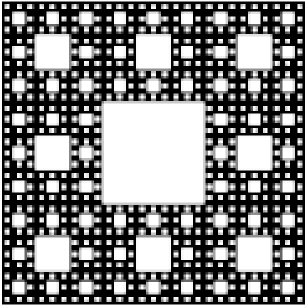
Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :



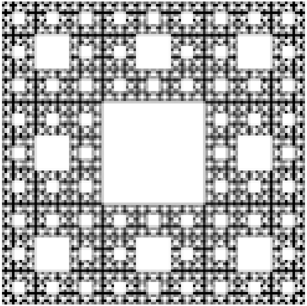
Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :



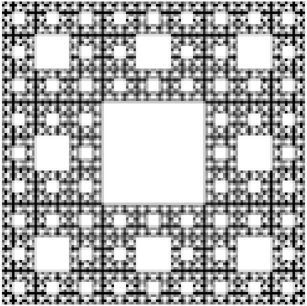
Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :



Le tapis de Sierpinski

La construction est similaire à celle de l'ensemble de Cantor :



Il ne reste que des frontières. Le tapis de Sierpinski est d'aire nulle.

Le flocon de Von Koch

Le flocon de Von Koch

Von Koch : mathématicien de la fin du XIXième siècle.

Le flocon de Von Koch

Von Koch : mathématicien de la fin du XIXième siècle.
Il travaille sur la théorie des nombres et construit la première fractale *continue*.

Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :

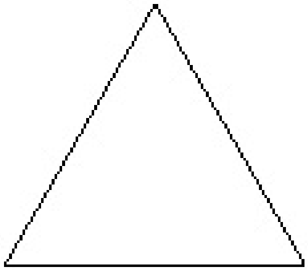
Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :

On commence avec un triangle équilatéral de côté 9cm.

Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :



Etape 1

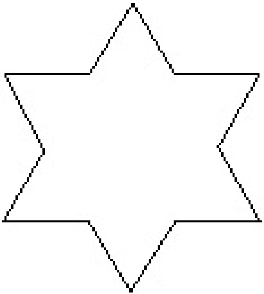
Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :

Ensuite, sur chacun des côtés, on ajoute sur le tiers du milieu un petit triangle équilatéral.

Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :



Etape 2

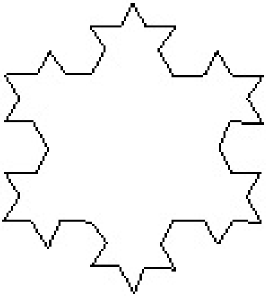
Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :

On recommence ensuite sur chaque côté de la figure obtenue.

Le flocon de Von Koch

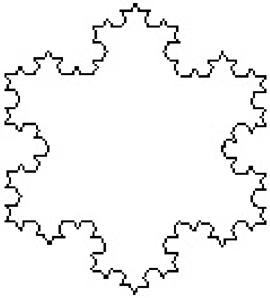
Encore une contruction itérative :



Etape 3

Le flocon de Von Koch

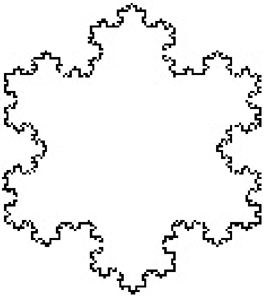
Encore une contruction itérative :



Etape 4

Le flocon de Von Koch

Encore une contruction itérative :



Etape 5

Le périmètre et l'aire du flocon

Le périmètre et l'aire du flocon

Résultats obtenus pour les 10 premières étapes :

Etape	1	2	3	4	5	6
Périmètre	27	36	48	64	85,33	114
Aire	35,1	46,7	52	54,2	55,3	55,7

Etape	7	8	9	10
Périmètre	152	202	270	360
Aire	56,10	56,11	56,12	56,12

Le périmètre et l'aire du flocon

On peut pousser le calcul plus loin. En fait, on trouve que le périmètre du flocon est *infini* !
Pour l'aire, on trouve envion $56,12\,\text{cm}^2$.

Résumé

On a construit un objet géométrique fractal pour lequel :

- le périmètre est infini,
- l'aire est finie.

Résumé

On a construit un objet géométrique fractal pour lequel :

- le périmètre est infini,
- l'aire est finie.

Cette situation existe-t-elle dans la réalité ?

Résumé

On a construit un objet géométrique fractal pour lequel :

- le périmètre est infini,
- l'aire est finie.

Cette situation existe-t-elle dans la réalité ?

Presque ! Nos poumons sont d'un volume donné assez faibe, mais la surface des cellules pulmonaires est extrêmement grande : cela *maximise* la surface d'échange avec le sang.

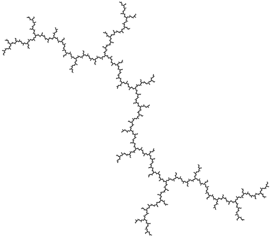
Les ensembles de Julia

Les ensembles de Julia

A tout point c du plan, encore par un processus itératif, on peut asocier un fractal, appelé *ensemble de Julia* J_c.

Les ensembles de Julia

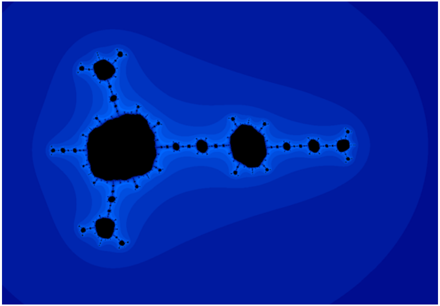
A tout point c du plan, encore par un processus itératif, on peut asocier un fractal, appelé *ensemble de Julia* J_c.



L'ensemble de Julia correspondant au point $(0, 1)$.

Les ensembles de Julia

A tout point c du plan, encore par un processus itératif, on peut asocier un fractal, appelé *ensemble de Julia* J_c.



Un autre ensemble de Julia.

Les ensembles de Julia

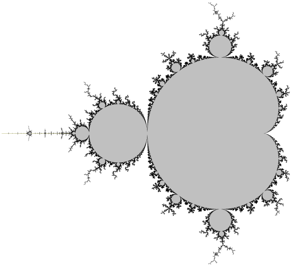
On peut définir l'*ensemble de Mandelbrot* comme suit :

Il s'agit de l'ensemble des points du plan pour lesquels l'ensemble de Julia est *connexe*, autrement dit en “un seul morceau”.

Les ensembles de Julia

On peut définir l'*ensemble de Mandelbrot* comme suit :

Il s'agit de l'ensemble des points c du plan pour lesquels l'ensemble de Julia J_c est *connexe*, autrement dit en “un seul morceau”.



L'ensemble de Mandelbrot.

A quoi ça sert en pratique ?

A quoi ça sert en pratique ?

On peut construire un mur anti-bruit très performant,

A quoi ça sert en pratique ?

On peut construire un mur anti-bruit très performant,

A quoi ça sert en pratique ?

On peut construire un mur anti-bruit très performant,

Un nouvel outil de compréhension du monde réel (dimension, autosimilarité, ...),

A quoi ça sert en pratique ?

On peut construire un mur anti-bruit très performant,

Un nouvel outil de compréhension du monde réel (dimension, autosimilarité, ...),

Des physiciens, biologistes, et mathématiciens élaborent des outils de dépistage très précoce de cancers : une cellule cancéreuse est plus *régulière*, de dimension plus petite qu'une cellule saine.

Merci pour votre attention