Devoir surveillé **TS** **4 heures** **Le 17/11/2009**

Exercice 1 : 4 points

10 affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de1.a à 3.d. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation la mention VRAI ou FAUX. Chaque réponse convenable rapporte 0,4 points. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $(e^a)^b = e^{(a^b)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x+1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3. b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $(u_n \times v_n)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

Exercice 2 : 6 points

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par

$$\begin{cases} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f(U_n) \end{cases}$$

1. Etudier f. Tracer la courbe représentative de f et y = x. Construire les points : $M_0(U_0\,;\,0)$, $M_1(U_1\,;\,0)$, $M_2(U_2\,;\,0)$, $M_3(U_3\,;\,0)$ et $M_4(U_4\,;\,0)$. Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence de la suite (U_n) ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ a alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n.
b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.
c. Calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 3 : 7 points

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad \text{(E)},$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\text{E}')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) \text{ soit solution de } (\text{E}').$$

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).
Résoudre l'équation (E').

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et Γ celle de la fonction : $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ.
b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 4 : 3 points

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :
La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g'(x) & = & g(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ g(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par : $u_n = \dfrac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

1. Démontrer que $1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (\mathrm{e}-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire, en utilisant aussi la PARTIE A, que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}-1$.