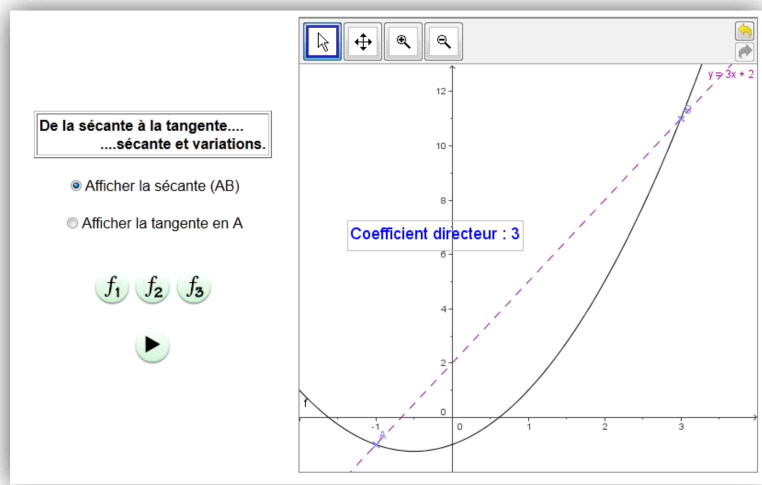
Exemple de progression en TSTI2D

Le constat :

Bien que la dérivée soit une notion de 1ère, il semble que les vacances aient eu un effet assez dévastateur sur la mémoire des élèves de la classe. Au moment de passer aux nouvelles notions, je m'aperçois assez vite que seuls 2 élèves de la classe sont capables de dériver des fonctions simples et ne savent plus me dire à quoi sert cette notion. Aucun élève ne possède de calculatrice pouvant réaliser du calcul formel, un (ou deux) a téléchargé le programme SUPRAMATH sur TI83.

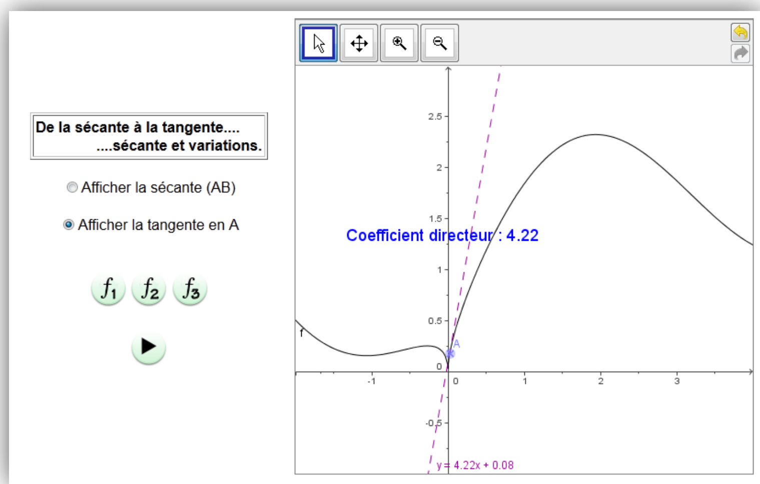
[Classe entière] **Objectif : (re)Donner du sens pour motiver le calcul des dérivées**

Rapidement, on réexplique le principe qui consiste à remplacer localement une courbe complexe par la tangente à ce point lorsque l'on peut. Il est alors aisé de savoir si (toujours localement) la tangente « monte ou descend » en fonction du signe de son coefficient directeur. Une animation GeoGebra permet de visualiser ce concept.

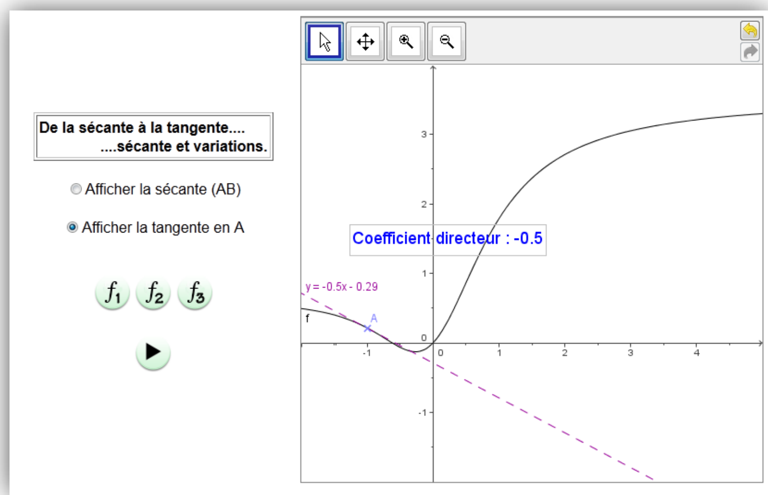


On aurait aussi pu à partir d'une situation concrète faire émerger leurs connaissances et amener différentes questions pour illustrer la nécessité d'introduire la dérivée.

Dans tous les cas, l'objectif est donc de faire comprendre qu'il suffit de connaître le signe du coefficient directeur des tangentes en tous les points de la courbe pour avoir des informations sur la fonction et sa dérivée.



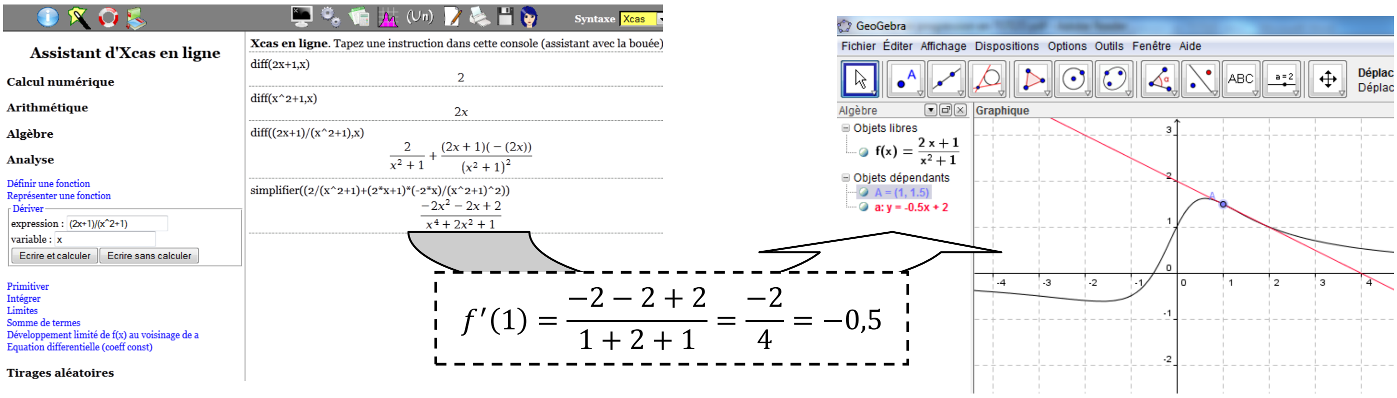
Ainsi, pour une fonction f donnée, on note f', la fonction qui à un réel x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction f, lorsque celui-ci existe.

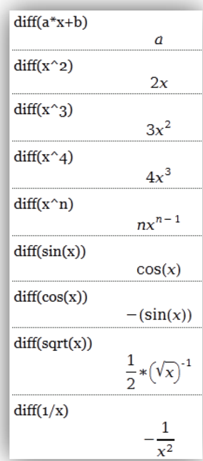


La figure animée permet de remarquer ces points critiques sans s'y attarder. ***Un logiciel comme GeoGebra permet donc de vérifier ou alors d'anticiper un résultat selon le moment où il est utilisé***

[Classe entière] **Objectif : retrouver les formules de base première**

Les souvenirs reviennent... On donne quelques exemples de calculs de la dérivée (sans détailler les calculs) à l'aide de l'interface XCas en ligne. Le gros avantage de cette version, outre le fait d'un affichage mathématique très propre, est la baguette de l'assistant qui permet d'effectuer les opérations de base sans connaître la syntaxe XCas. Pour quelques cas, on vérifie ponctuellement grâce à GeoGebra.





A l'aide du logiciel XCAS en ligne, on retrouve les formules de dérivation des fonctions usuelles vues en classe de première.

[Salle info - 2H00] **Objectif : Réaliser une activité ouverte : aire sous l'hyperbole**

Cette activité provient de la banque d'exercices de la défunte épreuve expérimentale de TS. Elle est adaptée au niveau de la classe, en effet les trois quarts ne commencent pas la première question car ils n'arrivent pas à tracer la droite d'équation $y = -2x + 1$... Il faut donc adapter quelque peu les objectifs...

> **Activité**
>
> L'unité est le centimètre. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour une droite donnée $(\mathcal{D})$, on note A et B les points d'intersection de la droite $(\mathcal{D})$ avec les axes du repère.
>
> 1. Quelle est l'aire du triangle OAB lorsque la droite $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $y = -2x + 1$?
> 2. Même question si $(\mathcal{D})$ est la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
> 3. Existe-il une autre tangente à la courbe $\mathcal{C}$ pour laquelle l'aire du triangle OAB est plus grande que celle trouvée à la question 2 ?

Les Questions 1 et 2 sont réalisées avec papier/crayon et permettent donc de revoir :

- Comment tracer une droite
- Comment trouver les intersections avec les axes par le calcul

Une fois la droite tracée, les questions ne posent pas de problème... au moins géométriquement, car on lit assez bien les longueurs. Du coup, la classe ne comprend pas trop pourquoi, on cherche à calculer les coordonnées des points d'intersection. Peut-être aurait-il fallu prendre des solutions non entières ?

Au fur et à mesure, du retour en classe sur ces deux premières questions, j'ai réalisé avec mon ordi sous GeoGebra au vidéoprojecteur la figure. Cela permet de découvrir :

- Comment construire puis tracer une droite
- Comment construire une intersection entre deux objets
- Où lire les coordonnées des points d'intersection et l'aire du triangle
- Comment tracer la courbe d'une fonction
- Comment tracer une tangente
- ...

Pour la question 3, les élèves se mettent alors un par poste et réalisent une figure pour conjecturer puis ils doivent rédiger un début de preuve. Malheureusement, certains restent au niveau de la conjecture. D'autres commencent à poser le problème mais se découragent vite devant le nombre de variables. Seuls deux binômes arrivent au bout de la preuve dans les 2 heures imparties. L'exercice semble trop dur pour être fini seul à la maison et du coup reste inachevé pour la plupart... Est-ce un souci qu'ils n'aient pas fini la démonstration ? Est ce qu'une correction aurait été utile ? Mais le principal n'est-il pas que durant ces deux heures la plupart des élèves aient été actifs devant le problème ?....Chacun avance à sa vitesse....

[Classe entière] **Objectif : Revenir sur les opérations sur les dérivées**. Pour les opérations sur les dérivées : (détailler), on s'aperçoit que la dérivation n'est pas si simple. (expliquer) Et là magie, la formule $(u \times v)'$ rappels des souvenirs à certains....(ouf!)

[Salle info - 1H00] : Objectif : entraînement à la technique.

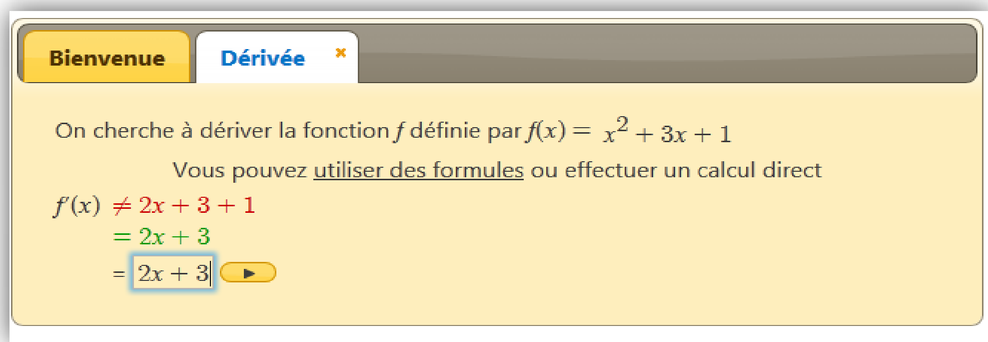
L'énoncé est écrit au tableau, l'objectif de cette séance est de travailler la technique de calcul de dérivé qui est un prérequis à la résolution de nombreux problèmes. Les élèves travaillent sur feuille avec des ordinateurs à disposition dans la salle (un par élève). L'enseignant leur présente au vidéoprojecteur un nouvel outil : CALCULUS pour leur permettre d'effectuer leurs essais. Jusqu'à présent, l'enseignant a lui-seul manipulé un logiciel mystérieux et magique de calcul formel qui donne la dérivée de n'importe quelle fonction, mais cela n'explique en rien le résultat affiché, ni par quelle démarche on est arrivé à celui-ci.

1. $f(x) = 5x - 8$	2. $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$	3. $f(x) = 9x^5 + \cos(x)$
4 . $f(x) = x \times \sin x$	5. $f(x) = (1 + x^2)(7 - x)$	6. $f(x) = (1 - \sin x) \cos x$
7. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$	8. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$	9. $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{4x+1}$
10. $f(x) = 2x + 1$	11. $f(x) = (2x+1)^2$	12. $f(x) = (2x+1)^3$
13. $f(x) = (2x+1)^4$	Conjecturer la dérivée de $f(x) = (2x+1)^n$ (n entier natuel)	

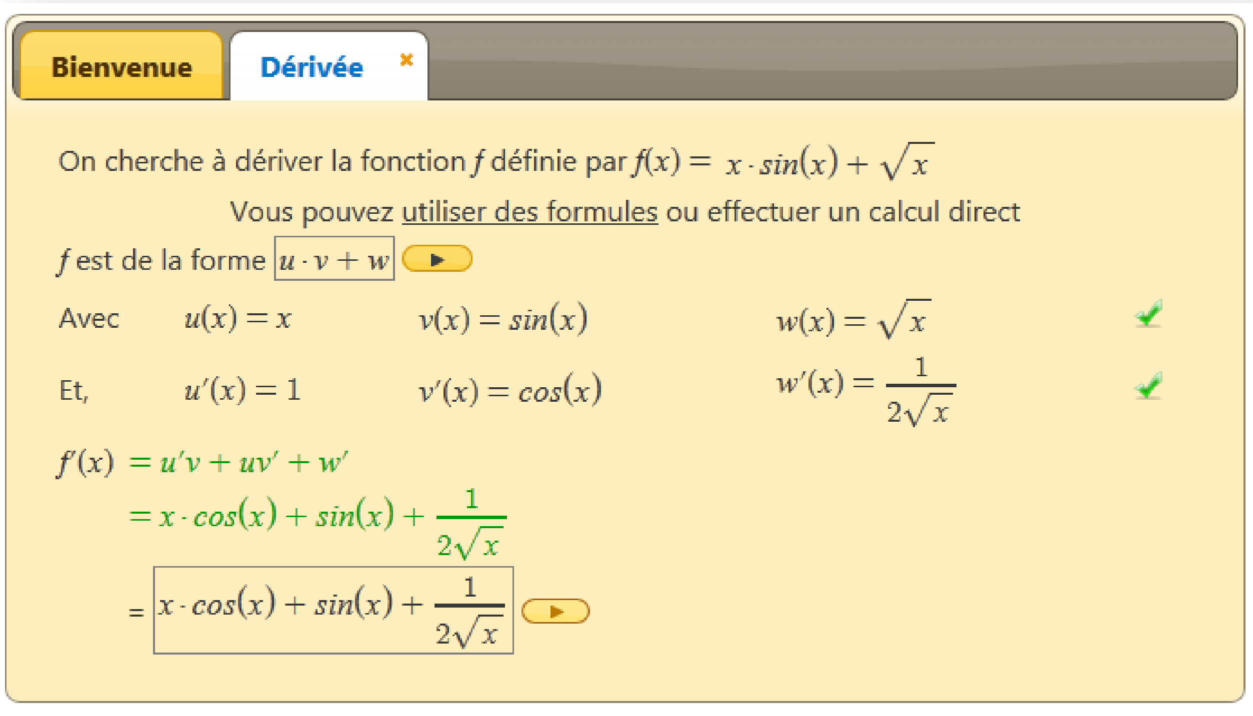
Ce logiciel est ici proposé en phase d'apprentissage des formules, mais on peut aussi (comme cela sera présenté plus loin) suggérer son utilisation lors de la résolution d'un problème ouvert. Reste à voir à l'usage si le logiciel l'aide à apprendre ses formules et à se créer des images mentales des formules à maîtriser ou au contraire cela peut lui compliquer la tâche car l'élève hésite entre plusieurs formules, et peut avoir du mal à interpréter les messages du logiciel.

L'objectif avec CALCULUS est donc de permettre à l'élève de faire des essais, de se tromper, de se corriger lorsqu'il propose une expression pour la dérivée.

➲Il peut soit proposer directement une expression qu'il a calculé juste pour vérifier :



➲ Soit l'utiliser comme assistant pour reconnaître et utiliser des formules de produits ou quotients :

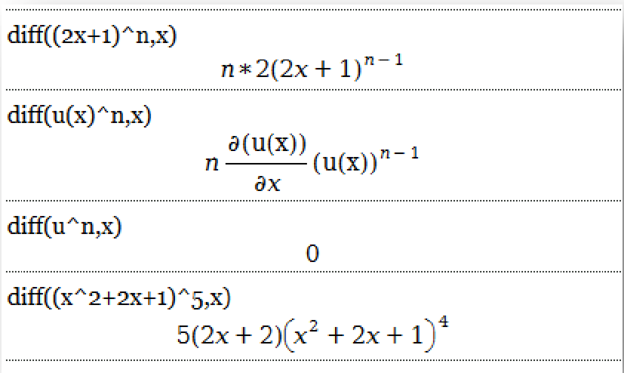


[Classe entière] : **Objectif : Découvrir une nouvelle formule**

Retour en classe, sur la conjecture avancée :

si $f(x) = (2x+1)^n$ alors $f'(x) = 2 \times n \times (2x+1)^{n-1}$

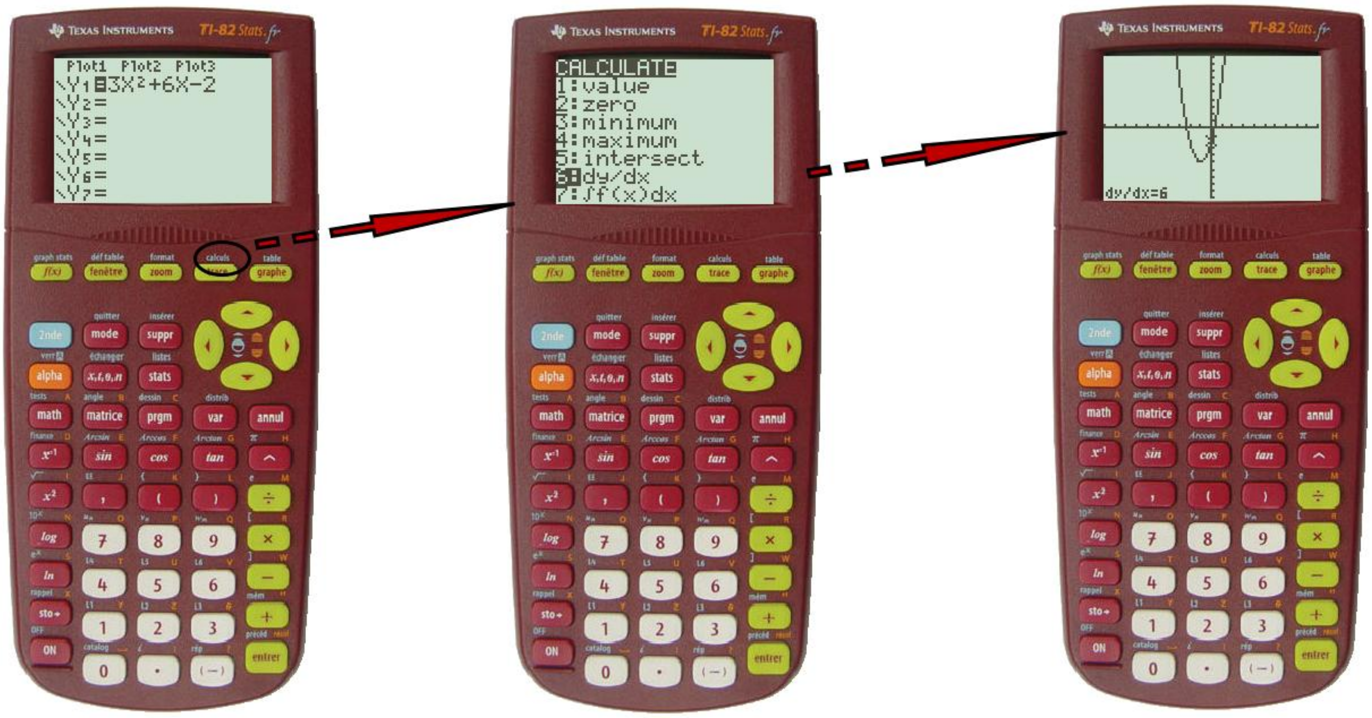
Là encore le calcul formel, permet de conforter l'idée de la justesse de la formule. Dans tous les cas, la preuve de celle-ci nécessitant une démonstration par récurrence n'est pas accessible aux élèves de TSTI2D.



Quelques exemples sont calculés, puis écrits dans le cours ensuite après vérification.

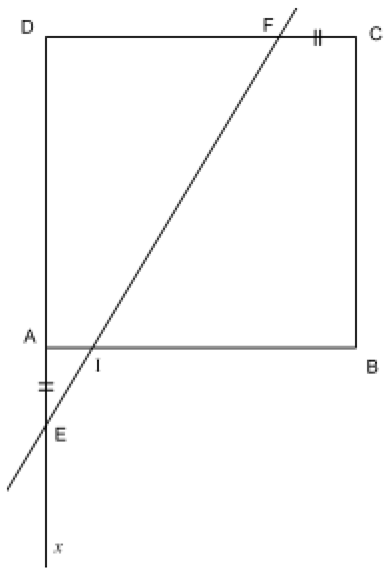
[Classe entière] : **Objectif : Voir d'autres moyens de vérification.**

En effet, nous ne disposons pas d'ordinateur en permanence sous la main, contrairement à la calculatrice. La majorité des modèles proposent une - très bonne - estimation du nombre dérivé qui peut permettre de se convaincre ou non de l'exactitude d'une formule trouvée.



... mais je n'ai jamais vu d'élève s'en servir lors d'un contrôle... sûrement une histoire de confiance en soi... ou alors l'outil est peu être trop lourd à mettre en place.

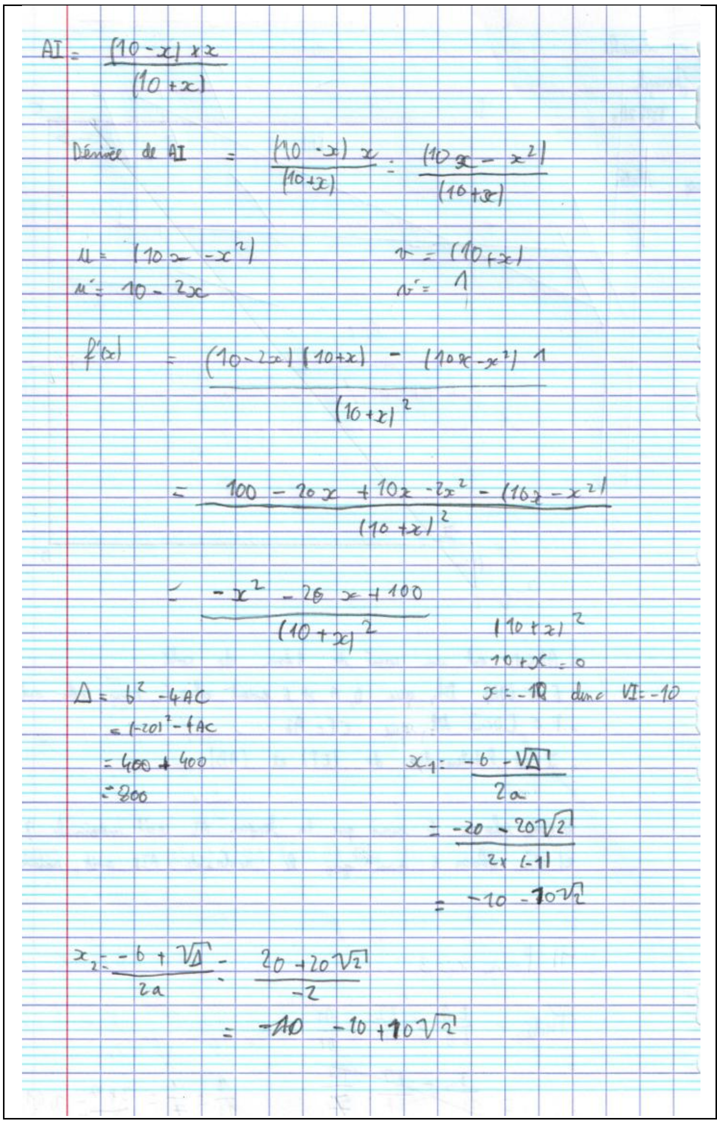
[Salle info] : **Objectif : Résoudre un problème d'optimisation**



Ce problème présenté sur le site de l'[académie d'Amiens,](#) propose de déterminer la position du point F permettant de maximiser la longueur AI puis l'aire du triangle AIE.

La construction en elle même n'est pas très complexe, mais intéressante avec un logiciel de géométrie dynamique (en particulier réfléchir au report de longueur). La consigne était d'utiliser les outils pour vérifier les calculs. Là encore, d'une part, GeoGebra permet de visualiser très facilement les variations des longueurs et des aires pour obtenir les positions approximatives du point F. D'autre part, même s'il s'agit ici de fonctions rationnelles, les erreurs de calcul sont multiples, on peut alors utiliser différents outils pour dériver (CALCULS, XCas), pour trouver les racines de la fonction dérivée, pour factoriser, ...

Voici un exemple de copie qui ne permet pas de voir les étapes dans la mise en œuvre de la démarche, les essais éventuels dans la mesure où le travail a été rédigé au propre avant d'être rendu.



$AI = \dfrac{(10-x)\times x}{(10+x)}$

Dérivée de AI $= \dfrac{(10-x)\,x}{(10+x)} = \dfrac{(10x - x^2)}{(10+x)}$

$u = (10x - x^2)$ $\quad v = (10+x)$

$u' = 10 - 2x$ $\quad v' = 1$

$f'(x) = \dfrac{(10-2x)(10+x) - (10x-x^2)\,1}{(10+x)^2}$

$= \dfrac{100 - 20x + 10x - 2x^2 - (10x - x^2)}{(10+x)^2}$

$= \dfrac{-x^2 - 20x + 100}{(10+x)^2}$

$(10+x)^2$

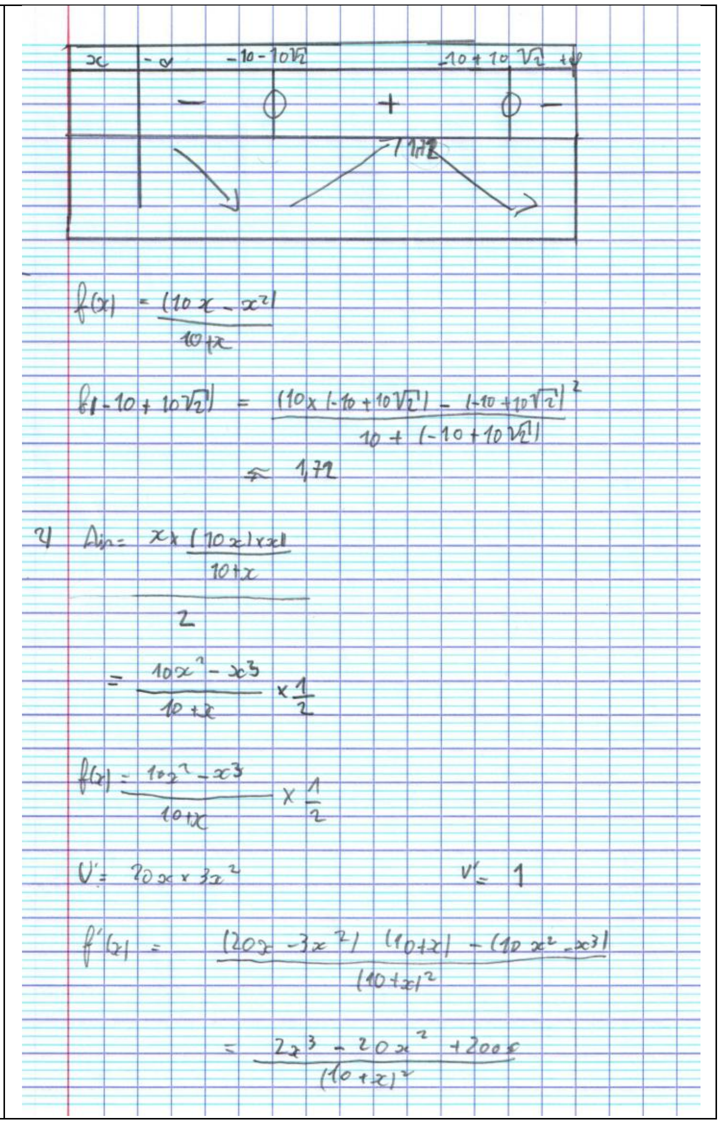
$10 + x = 0$

$x = -10$ donc VI $= -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-20)^2 - 4ac$
$= 400 + 400$
$= 800$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-20 - 20\sqrt{2}}{2\times(-1)} = -10 - 10\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{20 + 20\sqrt{2}}{-2} = \cancel{-10}\ -10 + 10\sqrt{2}$



x	$-\infty$		$-10-10\sqrt{2}$		$-10+10\sqrt{2}$		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	
		↘		↗	$1{,}72$	↘	

$f(x) = \dfrac{(10x - x^2)}{10+x}$

$f(-10 + 10\sqrt{2}) = \dfrac{(10\times(-10+10\sqrt{2}) - (-10+10\sqrt{2})^2}{10 + (-10+10\sqrt{2})}$

$\approx 1{,}72$

4) $A_{in} = \dfrac{x \times \dfrac{(10x)(x \times 1)}{10+x}}{2}$

$= \dfrac{10x^2 - x^3}{10+x} \times \dfrac{1}{2}$

$f(x) = \dfrac{10x^2 - x^3}{10+x} \times \dfrac{1}{2}$

$U' = 20x - 3x^2$ $\quad V' = 1$

$f'(x) = \dfrac{(20x - 3x^2)(10+x) - (10x^2 - x^3)}{(10+x)^2}$

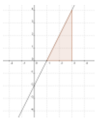
$= \dfrac{2x^3 - 20x^2 + 200x}{(10+x)^2}$

[Classe entière] : Objectif : Découvrir le lien entre aire sous la courbe et primitive.

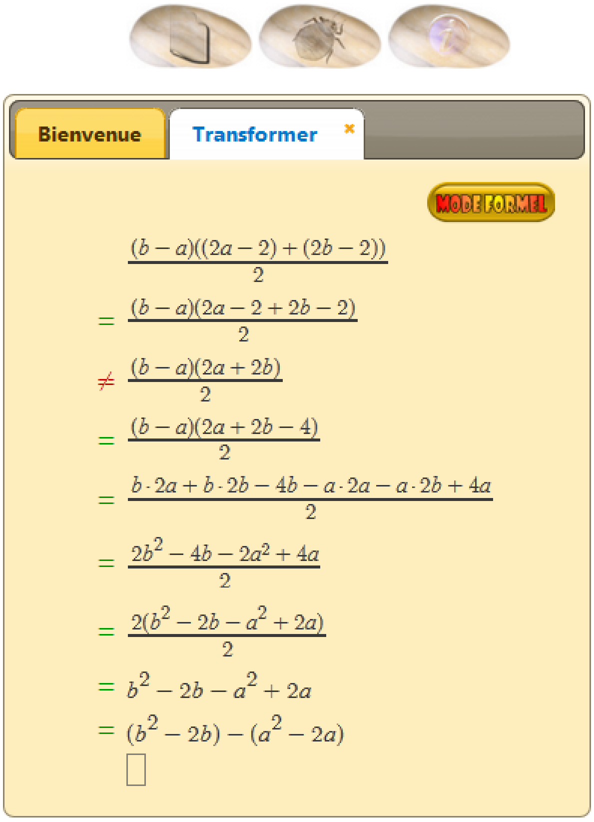
Soit f, la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 2$. On note $(\mathcal{D})$, sa représentation graphique.

1. Tracer $(\mathcal{D})$ dans un repère orthonormé (unité 1 carreau).
2. On considère la surface $S_{1,3}$ délimitée par : $\begin{cases} \text{La droite } (\mathcal{D}) \\ \text{Les droites d'équation} x = 1 \text{ et } x = 3 \\ \text{L'axe des abscisses} \end{cases}$
   (a) Estimer en carreaux l'aire de la surface $S_{1,3}$.
   (b) Justifier le résultat précédent par un calcul.
3. Mêmes questions pour la surface $S_{2,4}$ délimitée par $\begin{cases} \text{La droite } (\mathcal{D}) \\ \text{Les droites d'équation} x = 2 \text{ et } x = 4 \\ \text{L'axe des abscisses} \end{cases}$
4. Soient $1 < a < b$, on considère la surface $S_{a,b}$ délimitée par $\begin{cases} \text{La droite } (\mathcal{D}) \\ \text{Les droites d'équation} x = a \text{ et } x = b \\ \text{L'axe des abscisses} \end{cases}$
   (a) Exprimez en fonction de a et b, l'aire de cette surface.
   (b) Essayer de transformer cette formule pour la mettre sous la forme

$$\underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\text{Expression en } b} - \underbrace{(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}_{\text{Expression en } a}$$



Le début du travail se passe sur feuille. Une fois la courbe de la fonction tracée, les questions 2 et 3 permettent aux élèves d'imaginer des découpages (triangles, rectangles, trapèzes, ...) Ils seront utiles pour la généralisation en question 4. Pour cette dernière question les calculs sont assez complexes du fait des deux variables. On propose alors aux élèves d'utiliser à nouveau CALCULUS avec une autre fonctionnalité : *la transformation d'expressions*.



Cette partie de CALCULUS fonctionne comme le vérificateur d'égalités programmé par Jean-Philippe BLAISE à l'époque de 123Maths : le principe de permettre à l'élève d'écrire les étapes qu'il souhaite de son calcul. La machine se contente de lui dire si l'égalité est vraie ou non.

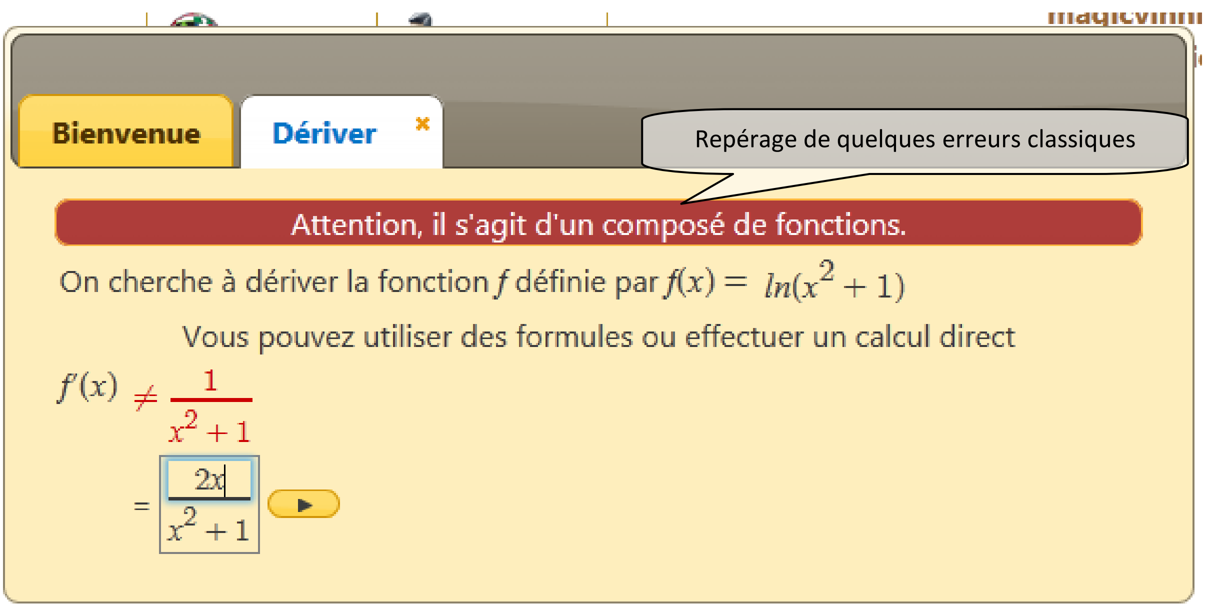
Avec la possibilité d'utiliser un moteur formel (le module Sympy de Python pour information), la vérification peut se faire numériquement ou formellement, permettant ainsi de travailler avec des expressions à plusieurs variables.

A la fin de l'exercice, on constate que l'aire de la surface peut se mettre sous la forme $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de la fonction f. Après réflexion, une autre piste intéressante proposée par l'académie d'Orléans-Tours lors des échanges aurait été de fixer l'une des bornes, ainsi, la structure "$F(x) - K$" serait apparue d'elle même permettant aux élèves de chercher comment on obtient K.

[Salle info] : **Objectif : Travailler avec la fonction logarithme.**

A l'occasion du cours sur la fonction ln, différents exercices sont proposés. Là encore, lorsque la classe est dédoublée, les élèves peuvent avancer sur les exercices à leur rythme (Cf PDF de cours distribué aux élèves)

Exercice E4 - Question 2



Exercice E5 - Question 3

Bienvenue | Transformer ×

Impossible de derterminer l'ensemble de definition

$$3ln(3)+2ln(6)-4ln(\sqrt{3})$$
$$= 3ln(3)+2ln(6)-2ln(3)$$
$$\neq 3ln(3)+2ln(2)+ln(3)-2ln(3)$$
$$= 3ln(3)+2(ln(2)+ln(3))-2ln(3)$$ Attention, l'égalité semble vraie, mais je ne peux être formel.
$$= 3ln(3)+2ln(2)+2ln(3)-2ln(3)$$ Attention, l'égalité semble vraie, mais je ne peux être formel.
$$= 3ln(3)+2ln(2)$$ Attention, l'égalité semble vraie, mais je ne peux être formel.

Ici, le moteur de calcul formel ne voit pas l'égalité, ce sont donc les expressions numériques qui sont comparées.

Exercice E5 - Question 4

Bienvenue | Transformer × | Transformer ×

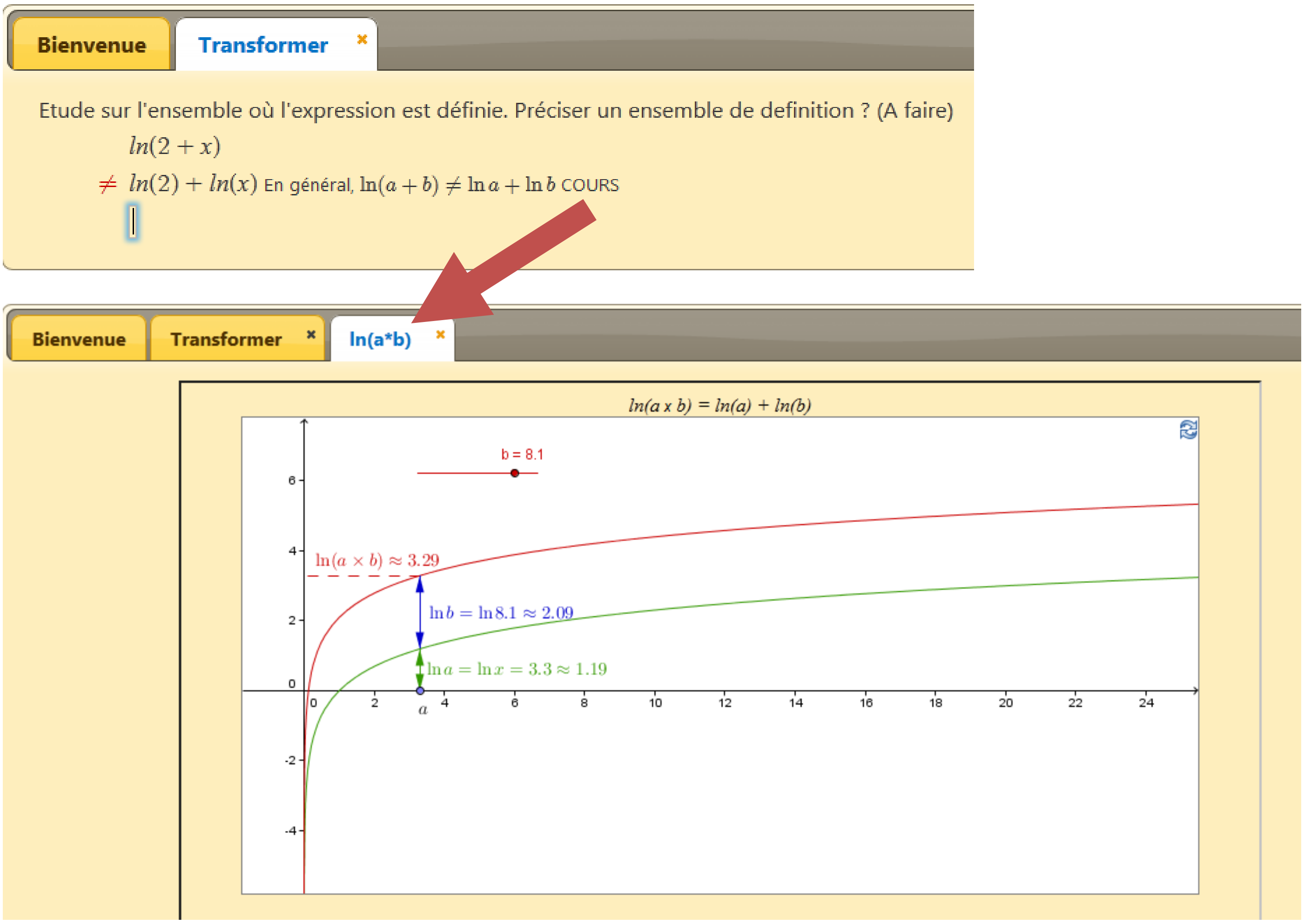
Etude sur l'ensemble où l'expression est définie. Préciser un ensemble de definition ? (A faire)

$$\frac{3}{4}ln\left(x^2\right)+ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{3}{4}2\cdot ln(x)-ln\left(x^2\right)$$ Attention, cette égalité ne semble pas toujours vraie.par exemple sur $]-\infty,0[$
$$= \frac{3}{2}ln(x)-2ln(x)$$ Attention, cette égalité ne semble pas toujours vraie.par exemple sur $]-\infty,0[$
$$= \frac{-ln(x)}{2}$$ Attention, cette égalité ne semble pas toujours vraie.par exemple sur $]-\infty,0[$

On peut initier une réflexion sur les ensembles de définition des deux expressions

On a pourra exploiter certaines erreurs pour revenir sur certaines notions du cours.

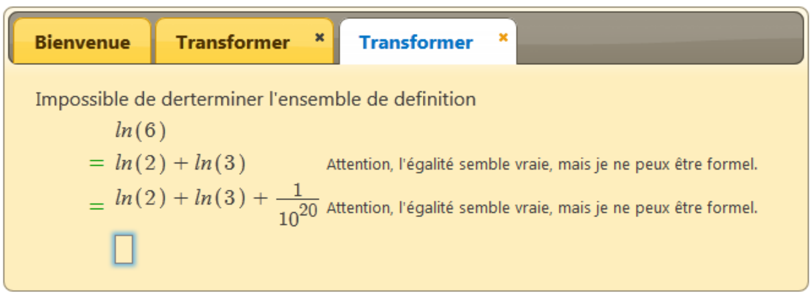
Il faudra à terme réfléchir sur l'utilité de cette possibilité : s'agit-il d'un artifice qui masque le concept ou cela apporte-il une réelle aide à l'élève lui permettant de se construire des images mentales de ce concept?



[Conclusion]

On peut donc à différents moment de l'année proposer aux élèves d'utiliser des petits outils pour faciliter et alléger la phase technique dans les calculs. Il est toujours difficile de trouver un juste équilibre entre les moments où l'on donne du sens (ex : animation pour le nombre dérivé) et celui ou l'on met en avant la technique de calcul. Malgré les multiples utilisations il reste que les élèves n'utilisent pas les outils d'eux même à la maison par exemple ou même en classe avec la calculatrice s'ils n'y sont pas invités par l'enseignant.

Au niveau de CALCULUS, c'est un logiciel en cours de création, il reste des bugs... Mais comme il s'agit d'un projet libre alors n'hésitez pas à apporter votre contribution en signalant un bug ou en participant au code. Toute aide sera la bienvenue !



Les outils utilisés en résumé :

- XCas en ligne
- CALCULUS
- Vérificateur d'égalité

Vincent MAILLE
Académie d'AMIENS