Travail informatique	**Produit scalaire**	Geogebra
Puissance d'un point par rapport à un cercle		*Durée:* 1H

(C) est un cercle, M un point du plan et d une droite passant par M.
On se propose d'étudier le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ *où A et B sont les points d'intersection, lorsqu'ils existent, de la droite d et du cercle (C).*

. Lancer le logiciel Geogebra.

<u>Construction:</u>

A partir d'une figure vide:

. Placer un point O (bouton puis clic droit sur le point pour le renommer).

. Dessiner le cercle C de centre O et de rayon 4 (bouton , cliquer sur la flèche en bas à droite de l'icône pour choisir le bon choix de construction).

. Placer un point M (bouton puis clic droit sur le point pour le renommer).

. Dessiner une droite d passant par M (bouton , cliquer sur M puis à n'importe quel autre endroit de la figure, puis clic droit sur la droite pour la renommer).

. Bouger le point de la droite d différent de M (bouton) afin que la droite d coupe le cercle C.

. Placer les points d'intersection A et B de la droite d et du cercle C (cliquer sur la flèche du bouton puis choisir: Intersection entre deux objets).

. Dessiner des représentants des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ (cliquer sur la flèche du bouton puis choisir: Vecteur défini par deux points).
Le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est enregistré sous le nom u et le vecteur $\overrightarrow{MB}$ sous le nom v.

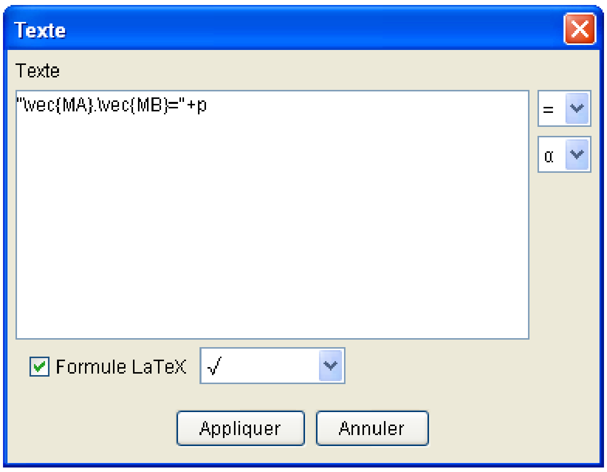
. Dans la zone de saisie, rentrer:

Saisie: p=u*v

Ceci va définir le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$. Il est à noter que Geogebra utilise le symbole fois:* pour définir le produit scalaire. Ceci peut donner l'occasion de rappeler les similitudes et les différences entre le produit de deux réels et le produit scalaire de deux vecteurs.

<u>Pour connaître la valeur du produit scalaire: deux méthodes:</u>
1ère]Lire la valeur de p dans la fenêtre algèbre du logiciel (menu Affichage si elle n'est pas visible)

2ème]. Cliquer sur le bouton ABC, puis sur la figure et compléter comme sur l'image ci-contre (ne pas oublier de cocher la case Formule LaTeX):



La figure complète est le fichier: **PuissanceCercle**.

Conjectures graphiques:

1)Faire varier la droite d (pas le point M!). Que constate t-on?

Les élèves doivent constater l'invariance du produit scalaire par rapport à la position de d.

2)Faire bouger le point M afin d'étudier le signe de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Les élèves doivent conjecturer les cas de produit scalaire nul, positif ou négatif en fonction de la position du point M par rapport au cercle.

Démonstration des résultats:

Soit A' le point de C diamétralement opposé à A.

On pourra placer le point A' pour faciliter la démonstration.
Des élèves ont du mal à placer A', ils savent montrer où il se trouve mais ont eu des difficultés à trouver la méthode graphique pour le construire (symétrie centrale ou intersection du cercle avec la droite (OA))

3)Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.

Utilisation de deux propriétés: AA'B est rectangle en B car B appartient au cercle de diamètre [AA'].
Pour certains élèves, dessiner les segments [AA'] et [BA'] leur a permis de mieux déterminer la nature de AA'B.
Donc B est le projeté orthogonal de A' sur (AB). Dès lors, on utilise la propriété du produit scalaire sur l'utilisation du projeté orthogonal pour aboutir au résultat.

4)En utilisant le fait que $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'}$, calculer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et en déduire qu'il ne dépend que de M et du cercle C.

Une indication pour ne pas que les élèves soient bloqués après la question 3.
Utilisation des propriétés opératoires du produit scalaire:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA'})=\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$$
$$=MO^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}=OM^2+\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}=OM^2+\overrightarrow{MO}.\vec{0}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$$
$$=OM^2+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}=OM^2+\overrightarrow{OA}.(-\overrightarrow{OA})=OM^2-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA}=OM^2-OA^2=OM^2-R^2$$ où R est le rayon du cercle (C). Le produit scalaire ne dépend que de la position de M et du cercle (C) (position de son centre et rayon).

5)Utiliser l'expression de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ trouvée à la question 4 pour étudier le signe de ce produit scalaire.

On constate que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2=(OM-R)(OM+R)$.
Le signe du produit scalaire est donc le signe de OM-R:
Si OM<R c'est à dire M est à l'intérieur du cercle (C): le produit scalaire est strictement négatif.
Si OM=R c'est à dire M appartient au cercle (C): le produit scalaire est nul.
Si OM>R c'est à dire M est à l'extérieur du cercle (C): le produit scalaire est strictement positif.

Prolongement possible:

On vient de démontrer que peut $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de la position de la droite d.
On peut se demander si il existe un ensemble de points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est égal à un réel donné.

On peut le conjecturer via le logiciel puis le démontrer aisément avec la formule $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2$.
La conjecture graphique à partir de la construction faite lors de ce module n'est pas simple.
Aussi ai-je fait une autre figure: **PuissanceCercleRevelateur** où on cherche l'ensemble des points M tels que

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=10$. Puisque le produit scalaire ne dépend pas de d, j'ai pris d=(OM).
En déplaçant M, on obtient en vert les points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}<10$ et en bleu, les points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}>10$. On peut changer la valeur 10 en rentrant a=*nouvelle valeur* dans la zone de saisie.

Ceci est une première approche des lignes de niveau que nous avons étudié après ce module.