Autour de la conférence de Jean-Christophe Yoccoz

La théorie des systèmes dynamiques étudie l'évolution au cours du temps d'un système. L'évolution du système peut être continue (dans ce cas l'évolution est régie par une équation différentielle) ou discrète (le temps est discrétisé et l'évolution est régie par une relation de récurrence ; il s'agit alors d'étudier des suites définies par récurrence). Les cinq exercices qui suivent examinent plusieurs exemples d'évolutions discrètes.

1 Exercice 1 : étude de la convergence d'une suite récurrente

Exercice **niveau TS** extrait du livre MATH Terminales C et E analyse et probabilités, Hachette, collection Terracher, Paris, 1992 et adapté par Frédéric Mahieu, enseignant au Lycée Français de Chicago.

On se propose dans cet exercice d'étudier par trois méthodes différentes la convergence de la suite numérique u définie par u_0 appartient à $[0,1]$ et pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} = f(u_n)$.

1. Question préliminaire.
   Identifier f et trouver les points fixes éventuels de f, c'est-à-dire les réels x tels que $f(x) = x$.
2. Méthode 1 : avec une formule explicite
   On pose $u_0 = \cos\phi$, où $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   - 2.a Montrer par récurrence que $u_n = \cos\left(\dfrac{\phi}{2^n}\right)$. On rappelle que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
   - 2.b En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Méthode 2 : avec le théorème de convergence monotone
   - 3.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
   - 3.b Montrer par récurrence que u est croissante (s'aider du sens de variation de f sur $[0,1]$) et en déduire la convergence de u.
   - 3.c En utilisant le théorème ci-dessous, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
     Théorème : soit (u_n) une suite dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers L et si f est continue en L alors $f(L) = L$.
4. Méthode 3 : avec les techniques de point fixe
   - 4.a Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$, c'est-à-dire que si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) \leq 1$.
   - 4.b Montrer que pour tout x appartenant à $[0,1]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   - 4.c En utilisant le théorème ci-dessous et la question précédente, montrer que pour $n \geq 0$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1|$.
     Théorème : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I pour laquelle il existe un réel M tel que pour tout x dans I, $|f'(x)| \leq M$. Alors, pour tous a et b dans I on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.
   - 4.d Montrer par récurrence que pour $n \geq 0$, $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.
   - 4.e En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 Exercice 2 : le problème de Syracuse (autrement appelé problème $3n+1$ ou problème de Collatz ou encore problème de Kakutani)

Exercice **niveau TS** proposé par Emmanuelle Sebert-Cuvillier, enseignante en PCSI au Lycée Pierre d'Ailly de Compiègne et chercheur associée au LAMFA.

Imaginons une fonction f définie par, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$,
$f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $f(n) = 3n+1$ si n est impair.
On appelle trajectoire de n la suite obtenue en partant de n et en lui appliquant de façon répétée cette fonction.

1. Cette fonction admet-elle des points fixes ?
2. Essayez à la main différentes trajectoires. Donner des trajectoires périodiques.
3. Programmer le calcul des trajectoires (on calculera par exemple la trajectoire de 27) et émettre une conjecture relative au comportement à long terme des trajectoires des entiers strictement positifs.
4. On définit la fonction g par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $g(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $g(n) = \frac{3n+1}{2}$ si n est impair.
   Programmer le calcul des trajectoires obtenues en appliquant de façon répétée la fonction g. Émettre une conjecture relative au comportement à long terme des trajectoires. Que dire des deux suites obtenues en appliquant f et en appliquant g à partir du même entier $n \in \mathbb{N}^*$?
5. On étudie maintenant les trajectoires des entiers strictement négatifs (cela est possible en généralisant la fonction f aux entiers strictement négatifs). Donner trois trajectoires périodiques.

Le site suivant permet de calculer les trajectoires `http://l.pellegrino.free.fr/syracuse/index.php`.
Ce qui rend ce problème ouvert particulièrement intéressant, comme le souligne Shalom Eliahou Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale à Calais et auteur de trois articles[1] consacrés à ce problème sur le site Image des Mathématiques, c'est l'accessibilité de son énoncé à un très jeune âge ainsi que sa propriété d'être instantanément expérimentable à la main. Le profil type du problème 3n+1 est celui d'une fonction simple à définir, mais dont le comportement devient difficile à prédire lorsqu'on l'itère, c'est-à-dire lorsqu'on l'applique de façon répétée. C'est un système dynamique discret. Des centaines de chercheurs, depuis des décennies, ont tenté et tentent encore de résoudre ce problème à l'apparence si anodine, c'est-à-dire de déterminer si toute trajectoire atteint 1. Il en a résulté un grand nombre de publications scientifiques, avec des résultats partiels et des études de problèmes analogues. Mais toujours pas de solution à ce jour.

3 Exercice 3 : croissance des populations : modèle logistique I

Exercice **niveau première année de CPGE**. Source : Equations différentielles et systèmes dynamiques, John Hubbard et Beverly West, traduction et adaptation Véronique Gautheron, Cassini, Paris, 1999.

Considérons une espèce animale dont les générations successives ne se chevauchent pas (par exemple penser à un papillon de nuit). On note $p(n)$ la population à la n-ième génération ; supposons que l'évolution de cette population puisse être décrite par un système itératif, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f telle que

$$p(n+1) = f(p(n)).$$

On peut dire que l'effectif d'une génération ne dépend que de l'effectif de la génération précédente.
Un premier modèle de ce type est donné par la formule

$$p(n+1) = (1+\alpha)p(n),$$

où α est un nombre réel que l'on peut supposer strictement positif (sinon l'espèce s'éteindrait rapidement). La relation de récurrence précédente se résout explicitement :

$$p(n) = (1+\alpha)^n p(0).$$

1. `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-elementaire-mais.html`
`http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-cycles-de.html`
`http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des.html`

La population croît donc exponentiellement. Ce modèle ne décrit convenablement la croissance de la population que dans des conditions idéales, par exemple dans un laboratoire où on cherche à produire un nombre aussi grand que possible d'individus d'une espèce donnée, en les préservant de toute perturbation extérieure. Il ne peut décrire convenablement un système réel sur une longue période, car à la longue les effets de la surpopulation, de la compétitivité entre individus, des maladies, se font sentir.
Un modèle plus réaliste prend en compte la surpopulation. Supposons qu'il y ait un effectif stable p_s de la population, qui est l'effectif supportable par l'environnement et que le taux de feertilité dépende de la différence entre la population effective et p_s. Un modèle possible répondant à ces conditions est

$$p(n+1) = \left(1 + \alpha \frac{p_s - p(n)}{p_s}\right) p(n).$$

Il est plus commode de prendre la population stable p_s comme unité de population. Posons donc $q(n) = \dfrac{p(n)}{p_s}$. La relation précédente devient alors

$$q(n+1) = (1+\alpha)q(n) - \alpha q(n)^2.$$

La situation que décrit cette dernière formule est appelée **modèle logistique**.

1. Faire l'étude du modèle logistique dans le cas où $\alpha = 1$. On posera pour cela $x(n) = 1 - q(n)$.
2. Faire l'étude du modèle logistique dans le cas où $\alpha = 3$. On posera $x(n) = 2 - 3q(n)$ puis $x(n) = 2\cos(\theta(n))$. Finalement, la différence essentielle entre ces deux cas est que le premier est complètement prévisible alors que le second semble garder un caractère aléatoire.
3. Etude du cas où la fertilité est faible ($0 < \alpha \leq 2$) et où la population initiale n'est pas trop grande ($0 < q(0) < 1 + \dfrac{1}{\alpha}$).
   (a) On pose $Q(x) = (1+\alpha)x - \alpha x^2$. Montrer qu'en conjuguant Q avec la fonction affine $\phi(x) = \dfrac{1+\alpha}{2\alpha} - \dfrac{x}{\alpha}$, c'est-à-dire en calculant $\phi^{-1} \circ Q \circ \phi$ ou $\phi \circ Q \circ \phi^{-1}$, on obtient un polynôme plus simple $P(x) = x^2 + c$.
   (b) Montrer qu'on peut interpréter la formule $q(n+1) = (1+\alpha)q(n) - \alpha q(n)^2$ comme la méthode d'Euler appliquée avec le pas $h = 1$ à l'équation $x' = \alpha(x - x^2)$.
   (c) Montrer que $q_s(n) = 1$ vérifie $q(n+1) = (1+\alpha)q(n) - \alpha q(n)^2$ et que si $0 < \alpha \leq 1$ et $0 < q(0) < 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ alors $q(n) \to 1$ ($(q(n))$ est attirée par q_s).
   (d) Montrer que $q_s = 1$ est un point fixe attractif[2] si et seulement si $0 < \alpha \leq 2$.

4 Exercice 4 : modèle logistique II

Exercice **niveau première année de CPGE**. Source : Equations différentielles et systèmes dynamiques, John Hubbard et Beverly West, traduction et adaptation Véronique Gautheron, Cassini, Paris, 1999.

On considère la fonction polynôme $x \mapsto p(x) = 2x - cx^2$ avec $c \neq 0$.

1. Trouver les points fixes de p.
2. Soit la fonction polynôme $x \mapsto q(x) = x^2$. Montrer que p est conjuguée à q, c'est-à-dire qu'il existe ϕ bijective telle que $q = \phi^{-1} \circ p \circ \phi$.
3. Quelles sont les valeurs attirées vers $\dfrac{1}{c}$ sous l'itération de p ?
4. Supposons que l'on connaisse π avec 1000 chiffres significatifs. Partant de $x_0 = 0.3$, au bout de combien de pas connaît-on $\dfrac{1}{\pi}$ avec 1000 chiffres significatifs ? Comparer avec les calculs qu'on aurait à effectuer en posant la division.

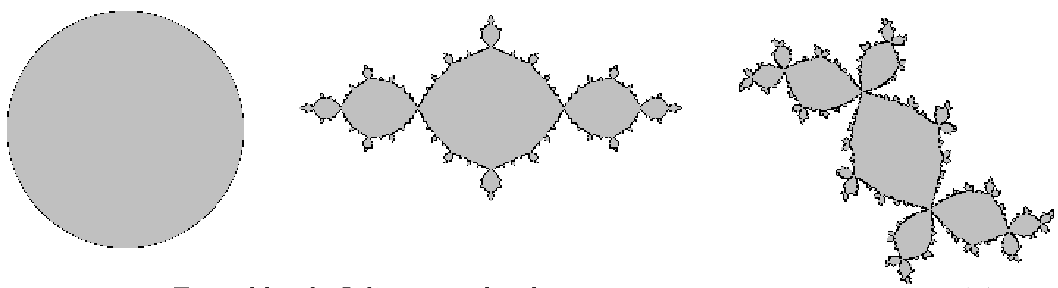
2. On dit qu'un point fixe x est attractif s'il y a un voisinage de x qui est attiré par x : si x_0 appartient à ce voisinage, l'orbite de x_0 est une suite convergeant vers x. On dit que le point fixe est répulsif s'il y a un voisinage de x tel que l'orbite de tout point x_0 appartenant à ce voisinage(excepté le point x) quitte ce voisinage au bout d'un certain temps. C'est la pente $m = f'(x)$ du graphe f au point (x, x) qui détermine le type d'un point fixe : le point fixe x est attractif si $|m| < 1$, répulsif si $|m| > 1$, indifférent si $|m| = 1$ et enfin super-attractif si $m = 0$. On peut justifier cette classification au moyen du développement de Taylor à l'ordre 1 de f au point x.

5 Exercice 5 : ensembles de Julia

Exercice **niveau première année de CPGE**. Source : Panoramaths, Philippe Werquin et Karim Zayana, Ellipses, Paris, 2002.

Soit c un complexe donné. A tout complexe z_0, on associe la suite (z_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c$. On appelle **ensemble de Julia** associé à c et on note J_c l'ensemble des complexes z_0 tels que la suite (z_n) correspondante soit bornée. L'objet de cet exercice est de représenter au moins approximativement J_c dans le plan complexe.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que (z_n) soit constante. En déduire que $J_c \neq \emptyset$.
2. Montrer que J_c est symétrique par rapport à O.
3. Montrer que J_c est borné. On montrera que si $z_0 \in J_c$ alors $|z_0| \leq 2 + |c|$.
4. On note $J_c^{(N)} = \{z_0,\ |z_N| \leq 2 + |c|\}$.
   (a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N},\ J \subset J_c^{(N)}$.
   (b) Pour N assez grand, on se doute que J et $J_c^{(N)}$ ne sont pas trop différents. Pourquoi ?
   (c) Programmer un test pour savoir si un z_0 donné est dans $J_c^{(N)}$. On passera z_0, c et N en paramètres.
   (d) En quadrillant le plan complexe, mettre en oeuvre un programme pour représenter approximativement $J_c^{(N)}$. On passera c, N, les nombres nx et ny de graduations selon $(x'x)$ et $(y'y)$ en paramètres.
   (e) Utiliser le programme avec par exemple $c = 0$, $c = -1$ puis $c = 0,12 + 0,74i$. Choisir d'abord des valeurs modérées pour N, nx et ny. On pourra vérifier ses codes Maple sur le site `http://www.mathcurve.com/fractals/julia/julia.shtml`.



Ensembles de Julia « remplis »lorque $c = 0$, $c = -1$ et $c = 0,12 + 0,74i$.

Pour en savoir plus : Arnaud Chéritat, « L'ensemble de Mandelbrot »– Images des Mathématiques, CNRS, 2010. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/L-ensemble-de-Mandelbrot.html`.

L'exercice suivant s'intéresse au cas du pendule simple, exemple de système dynamique régi par une équation différentielle sur lequel Jean-Christophe Yoccoz s'est appuyé tout au long de son exposé.

6 Exercice 6 : retour au pendule simple, étude locale aux deux points d'équilibre

Exercice **niveau deuxième année de CPGE** proposé par Gentiane Bichard, enseignante en PC au lycée Pierre d'Ailly de Compiègne.

Le mouvement du pendule (sans frottements) est régi par l'équation différentielle

$$x''(t) = -\omega^2 \sin x(t)$$

où $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ est la vitesse angulaire, g la constante de gravitation universelle, et ℓ la longueur de la tige, t désignant le temps.

Cette équation est du second ordre, on pose alors $y(t) = x'(t)$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Justifier que l'équation du pendule simple peut s'écrire comme équation du premier ordre en X sous la forme
$$X'(t) = \phi(X(t))$$
où ϕ est le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ périodique selon x défini par $\phi\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y, -\omega^2 \sin x)$.
2. Justifier à l'aide du théorème de Cauchy Lipschitz que par tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ passe une unique courbe intégrale c'est à dire une unique courbe paramétrée $(\mathbb{R}, (x,y))$ où $X = (x,y)$ est solution de $X' = \phi(X)$.
Il en résulte que dans le cas du pendule simple
– Les courbes intégrales remplissent le plan.
– Deux courbes intégrales distinctes ne se rencontrent jamais.
3. Étude des courbes intégrales au voisinage du point d'équilibre $(0,0)$.
   (a) Justifier que les points $(k\pi, 0)$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont des points d'équilibre, c'est-à-dire que le support de la courbe intégrale (on dit aussi l'orbite) passant par $(k\pi, 0)$ est réduit à cet unique point.
   (b) Justifier qu'au voisinage de $(0,0)$ l'équation $X' = \phi(X)$ peut se mettre sous la forme
   $$X' = A_1 X + B_1(X)$$
   où $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B_1(X) = \begin{pmatrix} \alpha(x,y) \\ \beta(x,y) \end{pmatrix}$ avec (α, β) à préciser. Montrer aussi que α et β sont du troisième ordre en (x,y).
   Le système différentiel $X' = A_1 X$ s'appelle système linéarisé de $X' = \phi(X)$ au voisinage de $(0,0)$.
   (c) Montrer que la matrice A_1 a pour valeurs propres $\pm i\omega$ et en déduire que les solutions de ce système peuvent être mises sous la forme $X(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t + \varphi) \\ -\omega a \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$. En déduire que les courbes intégrales sont alors des ellipses.
   L'énergie totale du pendule, somme de l'énergie cinétique $\dfrac{1}{2}y^2$ et de l'énergie potentielle $\omega^2(1 - \cos x)$ s'écrit au voisinage de $(0,0)$ $H_s(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + \omega^2 \dfrac{x^2}{2}$. Montrer que les courbes intégrales du système linéarisé sont les courbes de niveau de H_s (qu'on appelle Hamiltonien).
4. Étude des courbes intégrales au voisinage du point d'équilibre $(\pi, 0)$. Justifier qu'au voisinage de $(\pi, 0)$ en posant $z = x - \pi$ l'équation $X' = \phi(X)$ peut se mettre sous la forme
$$\begin{pmatrix} \dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + B_2(z,y)$$
où on a maintenant $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B_2(z,y) = \begin{pmatrix} \gamma(z,y) \\ \delta(z,y) \end{pmatrix}$ avec (γ, δ) à préciser. Montrer qu'on a encore γ et δ du troisième ordre en (x,y).
Le système différentiel $Z' = A_2 Z$ où $Z = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$ s'appelle système linéarisé de $X' = \phi(X)$ au voisinage de $(\pi, 0)$.
5. Montrer que la matrice A_2 a cette fois pour valeurs propres $\pm\omega$ et en déduire que les courbes intégrales sont alors des hyperboles.
Vérifier que l'énergie totale du pendule somme de l'énergie cinétique $\dfrac{1}{2}y^2$ et de l'énergie potentielle $\omega^2(1 - \cos x)$ donne au voisinage de $(\pi, 0)$ $H_u(x,y) = \dfrac{y^2}{2} - \omega^2 \dfrac{z^2}{2}$ et montrer que les courbes intégrales de ce système linéarisé sont encore les courbes de niveau du Hamiltonien H_u.
Quelle est la courbe de niveau 0 de H_u ? A quoi correspond-elle ?
6. Pour terminer, représenter sur un même graphe le portrait de phases des linéarisés au voisinage des points $(k\pi, 0)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Source : article d'Alain Chenciner intitulé « Systèmes dynamiques différentiables », Encyclopaedia Universalis.
Pour un joli dessin du portrait de phases global, vous pouvez aller sur le site
`http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/motivation.html`.

7 Exercice 7 : résolution d'équations différentielles « à l'ancienne »

Exercice **niveau deuxième année de CPGE** proposé par Sophie Rainero, enseignante en MPSI au lycée Pierre d'Ailly de Compiègne.

On considère l'équation différentielle

$$x^2\, y'' + \frac{9}{4}\, x\, y' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Soient $\sum a_n\, x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $\rho > 0$ et α un réel. Posons

$$u \ :]0, \rho[\to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

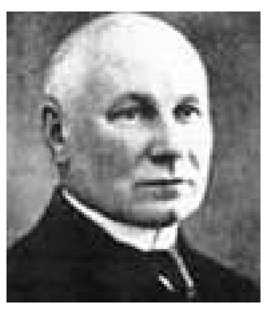
   Démontrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer les dérivées u' et u''.
2. Démontrer que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ admet une solution f telle qu'il existe un réel α et une série entière réelle $\sum a_n\, x^n$ de rayon de convergence infini, avec $a_0 = 1$, vérifiant

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad f(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

   On précisera α.
3. Sait-on exprimer la fonction f obtenue à l'aide de fonctions usuelles ?

La formule existe, mais ne nous apprend *a priori* pas grand chose, sans ordinateur. La solution analytique ne nous aide pas à « comprendre », à « voir »le comportement de la solution.
Ce petit exercice nous permet d'appréhender le contexte dans lequel Poincaré opère sa révolution conceptuelle : l'approche qualitative qu'il propose vient remplacer l'utilisation des solutions d'une équation différentielle à partir de stratégies de raccordement de représentations locales par des séries.

.



Karl Sundman, 1873-1949

Alors que la méthode de la section permet à Poincaré d'obtenir de nombreuses informations sur les solutions du problème restreint des trois corps, Karl Sundman montre qu'il est possible d'écrire des développements convergents pour les solutions de ce problème dans le cas où le moment cinétique n'est pas nul (articles de 1907 et 1909). Mais d'un point de vue pratique ces séries n'apportent rien, d'abord parce qu'elles convergent très lentement et ensuite parce qu'aucun renseignement qualitatif sur la nature de la solution n'est lisible sur la série qui la représente.
« Mais alors il n'y a plus des problèmes qui sont résolus et d'autres qui ne le sont pas ; il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus, selon qu'ils le sont par une série de convergence plus ou moins rapide, ou régie par une loi plus ou moins harmonieuse. Il arrive toutefois qu'une solution imparfaite nous achemine vers une solution meilleure. Quelquefois la série est de convergence si lente que le calcul est impraticable et qu'on a réussi qu'à démontrer la

possibilité du problème. [3] »
Ainsi se constitue la théorie des systèmes dynamiques. *« Au lieu de chercher les solutions pour des problèmes connus, on se tourne vers le problème pour demander ce que « résoudre »veut dire, jusqu'à aboutir à une nouvelle définition du problème. Il ne s'agit plus d'identifier les cas de solution mais de changer la question, non pas découvrir une nouvelle solution mais déployer une nouvelle solubilité.* [4] »

8 Exercice 8 : d'un médaillé Fields à un autre !

Exercice **niveau première et deuxième année de CPGE** proposé par Jacques Boulanger, professeur en TSI au Lycée Louis Thuillier d'Amiens et chercheur associé au LAMFA.

Voici un exemple dû à René Thom.
René Thom [5] (1923-2002) est le fondateur de la théorie des catastrophes. Il a reçu en 1958 la médaille Fields pour ses travaux de topologie différentielle. C'est un grand épistémologue français qui a eu une approche transdisciplinaire des problématiques. Il a notamment écrit « Stabilité structurelle et morphogénèse [6] »qui présente la théorie des catastrophes en termes simples au grand public et « Apologie du logos [7] », qui examine tous les domaines de la pensée et même la création artistique.

René Thom, 1923-2002

Dans tout ce qui suit l'espace usuel est rapporté à un repère orthonomal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ qui permet de l'identifier à $\mathbb{R}^3$. On fixe également des réels $0 < r < R$.

1. Le tore

1. On considère l'application $[0,1[\to \mathbb{R}^3$ qui à t associe le point $M(t)$ de coordonnées $\big(R\cos(2\pi t), R\sin(2\pi t), 0\big)$. Quelle est la trajectoire du point $M(t)$ quand t varie de 0 à 1 ?
2. Pour $t \in [0,1[$ fixé, on considère le point $P(t,u)$ défini pour $u \in [0,1[$ par

$$\overrightarrow{M(t)P(t,u)} = r\Big(\frac{1}{R}\cos(2\pi u)\overrightarrow{OM(t)} + \sin(2\pi u)\vec{k}\Big)$$

3. Henri Poincaré, Science et Méthode, 1908
4. Tatiana Roque, Les enjeux du qualitatif dans la définition d'un système dynamique, in CHAOS, Systèmes Dynamiques, Éléments pour une épistémologie, 2007
5. http ://www.les-mathematiques.net/histoire/histoire_thom.php
6. InterÉditions, Paris, 1972, 1977
7. Hachette, collection Histoire et Philosophie des Sciences, Paris, 1990

Décrire la trajectoire du point $P(t,u)$ lorsque t reste fixé tandis que u varie dans $[0,1[$.

3. Calculer les coordonnées du point $P(t,u)$ pour $(t,u) \in [0,1[\times[0,1[$, et décrire la surface $\mathbb{T}$ de l'espace sur laquelle $P(t,u)$ évolue, en précisant les sections de $\mathbb{T}$ par les plans parallèlles à xOy et les plans contenant Oz. Dessins correspondants.
4. Montrer que l'application $\phi : [0,1[\times[0,1[\to \mathbb{T}$ qui envoie (t,u) sur $P(t,u)$ est bijective et continue.

2. Action sur le Tore

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $[t]$ sa partie entière et on pose $f(t) = t - [t]$. Justifier que f est périodique dans $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $[0,1[$.
2. On note $A : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ définie par
$$A : P(t,u) \to P\big(f(2t+u), f(t+u)\big)$$
On dit qu'un point $P(t,u)$ du tore est un **point rationnel de dénominateur** $d \in \mathbb{N}^*$ si
$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \quad t = \frac{a}{d} \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{d}$$
Montrer que son image par A reste un point rationnel de dénominateur d.
3. Soit $P(t,u) \in \mathbb{T}$. On appelle **orbite de** $P(t,u)$ **sous l'action de** A l'ensemble formé des points $\{P_n\}$ définis comme suit
$$P_0 = P(t,u) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = A(P_n)$$
Démontrer que l'orbite d'un point $P \in \mathbb{T}$, rationnel de dénominateur d est un ensemble **fini** de points du tore.
4. De manière générale on dit qu'un point $P(t,u) \in \mathbb{T}$ est **périodique** si son orbite est finie. Démontrer qu'alors il existe un plus petit entier $n_0 > 0$ tel que $P_{n_0} = P(t,u)$ et qu'on appelle **temps de retour** du point $P(t,u)$.
5. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, démontrer que pour tout point $P \in \mathbb{T}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un point périodique $Q \in \mathbb{T}$ dont la distance à P ne dépasse pas ϵ, autrement dit **les points périodiques sous l'action de A forment une partie dense du tore**. Ou si on préfère, **tout point de $\mathbb{T}$ est arbitrairement proche d'un point dont l'orbite est finie**.

3. Calcul d' orbites

3.1. Etude de suite dans $\mathbb{R}^2$

On considère une suite de $\mathbb{R}^2$ définie par la donnée initiale (t_0, u_0) et par la formule de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (t_{n+1}, u_{n+1}) = (2t_n + u_n, t_n + u_n) \quad (*)$$

1. Méthode de première année
Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose des relations
$$t_{n+2} = 3t_{n+1} - t_n \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$
En déduire qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qu'on exprimera en fonction de (t_0, u_0) et telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} t_n = \alpha\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n \\ u_n = \gamma\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \delta\Big(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Big)^n \end{cases} \quad (**)$$
2. Méthode de seconde année
La relation de récurrence $(*)$ peut s'écrire sous forme matricielle
$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_n \\ u_n \end{pmatrix}$$
Déterminer la matrice M et montrer qu'elle est diagonalisable. En déduire $(**)$.

3.2. Application à l'action de A sur le tore

On considère de nouveau la fonction f vue en question (1) de la section 2.

1. Prouver que pour $t, t' \in \mathbb{R}$ on a l'équivalence

$$f(t) = f(t') \Leftrightarrow t' - t \in \mathbb{Z}$$

2. On fixe $(t, u) \in [0, 1[\times[0, 1[$. On pose $P_0 = P(t, u)$ et $P_{n+1} = A(P_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ comme à la question (3) de la section 2. On pose $(t_0, u_0) = (t, u)$ et comme en 3.1

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (t_{n+1}, u_{n+1}) = (2t_n + u_n, t_n + u_n)$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = P\big(f(t_n), f(u_n)\big)$$

3. On conserve les notations précédentes : montrer qu'il existe une droite vectorielle $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ telle que pour $(t, u) \in [0, 1[\times[0, 1[\cap\Delta$ on ait $\beta = \delta = 0$ dans les relations $(**)$. Que dire alors de l'évolution de P_n lorsque $n \to \infty$?