Exercice 2 :

Grâce au théorème de Thalès, on peut dire :

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BG}{BC} = \frac{FG}{AC}$$

Soit x la dimension du carré :

$$x = \frac{BG \times AC}{BC} = \frac{BG \times 14}{15}$$

et $BG = 15 - GC$

or $\sin \hat{C} = \frac{x}{GC}$

$$GC = \frac{x}{\sin \hat{C}}$$

et grâce au théorème d'Al-Kashi, on peut dire :

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos \hat{C}$$

$$\hat{C} = \arccos\left(\frac{AB^2 - BC^2 - AC^2}{-2 \times BC \times AC}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{13^2 - 15^2 - 14^2}{-2 \times 15 \times 14}\right)$$

$$= \arccos \frac{3}{5}$$

donc $BG = 15 - \frac{x}{\sin \hat{C}}$

$$x = \frac{15 \times 14 - \frac{14x}{\sin \hat{C}}}{15}$$

$$x = 14 - \frac{14x}{15 \sin \hat{C}}$$

$$x = \frac{14}{1 + \frac{14}{15 \sin \hat{C}}} = \frac{14}{1 + \frac{14}{\sin(\arccos(\frac{3}{5}))}} = \frac{84}{13}$$

La dimension du carré est donc de $\frac{84}{13}$.

Exercice 2 : exercice libre :

Commençons par calculer $\cos \hat{B}$:

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \times 14 \times 15 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$

Traçons la hauteur issue de A et appelons H le pt de concours avec la base

Dans le triangle rectangle BAH : $\cos \hat{B} = \frac{|BH|}{|BA|} \rightarrow |BH| = |BA| \times \cos \hat{B}$
$= 15 \times \frac{3}{5}$
$= 9$

De plus, $\sin^2 \hat{B} = 1 - \cos^2 \hat{B}$
$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$ d'où $\sin \hat{B} = \frac{4}{5}$

$\sin \hat{B} = \frac{|AH|}{|BA|} \rightarrow |AH| = |BA| \times \sin \hat{B}$
$= 15 \times \frac{4}{5}$
$= 12$

On sait que $(NM) // (AH) // (OP)$ (hauteur et carré inscrit à la base).

D'après le théorème de Thalès, dans le triangle BAH,

$\frac{|BP|}{|BH|} = \frac{|OP|}{|AH|} \rightarrow |OP| = \frac{12x}{9} = \frac{4x}{3}$

D'après le théorème de Thalès, dans le triangle CAH,

$\frac{|CM|}{|CH|} = \frac{|MN|}{|AH|} \rightarrow |CM| = \frac{\frac{4x}{3} \times 5}{12} = \frac{5x}{9}$

Donc $|MP| = |CB| - |PB| - |CM| = 14 - x - \frac{5x}{9} = 14 - \frac{14x}{9}$

MNOP était un carré $= 14 - \frac{14x}{9} = \frac{4x}{3}$

$\frac{26x}{9} = 14$

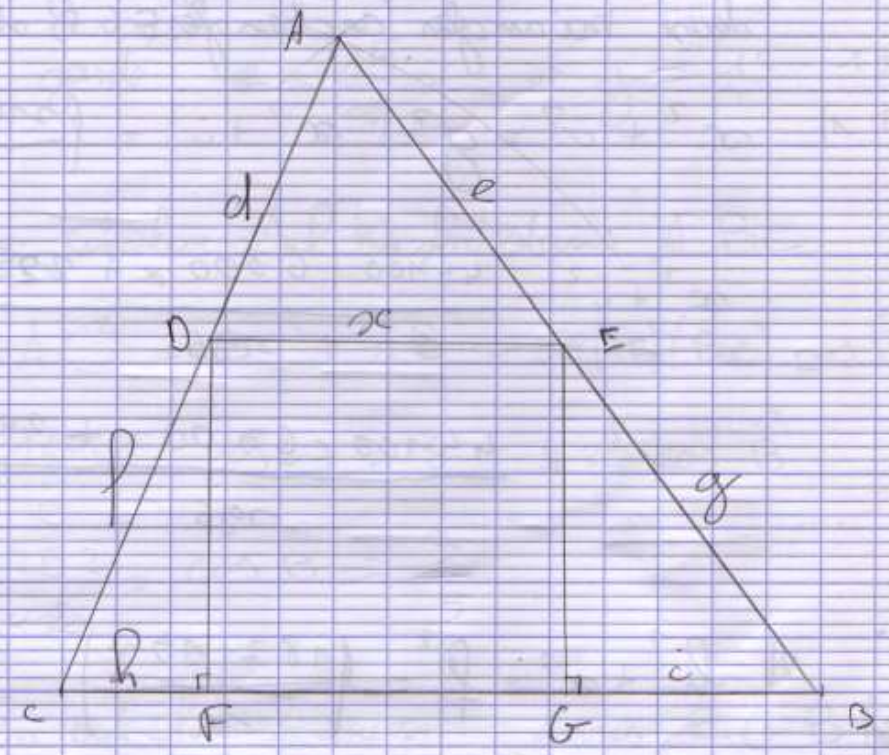
$x = \frac{14 \times 9}{26} = \frac{63}{13}$

la longueur d'un côté du carré est égale à $\frac{4x}{3}$

x était égal à $\frac{63}{13}$,

$\frac{4 \times \frac{63}{13}}{3} = \frac{84}{13}$ La longueur exacte des côté du carré est égal à $\frac{84}{13}$

Exercice 2 : exercice libre



Premier essai : je pose x la longueur d'un côté du carré.

Selon le théorème de Thalès ((CB) et (DE) parallèles et (CD) et (BE) sécantes en A)

$$\frac{x}{14} = \frac{e}{15} = \frac{d}{13}$$

$$e = \frac{15x}{14} \qquad d = \frac{13x}{14}$$

$$g = 15 - e = 15 - \frac{15x}{14} = \frac{210 - 15x}{14}$$

$$f = 13 - d = 13 - \frac{13x}{14} = \frac{182 - 13x}{14}$$

On utilise ensuite Pythagore dans les deux triangles rectangles EGB et DFC

1) $x^2 + i^2 = g^2 \quad x^2 + i^2 = \left(\frac{210 - 15x}{14}\right)^2$

$$x^2 + i^2 = \frac{44100 - 6300x + 225x^2}{196}$$

$$i^2 = \frac{44100 - 6300x + 29x^2}{196}$$

2) $h^2 + x^2 = f^2 = \left(\frac{182 - 13x}{14}\right)^2$

$$h^2 + x^2 = \frac{33124 - 4732x + 169x^2}{196}$$

$$h^2 = \frac{33124 - 4732x + 27x^2}{196}$$

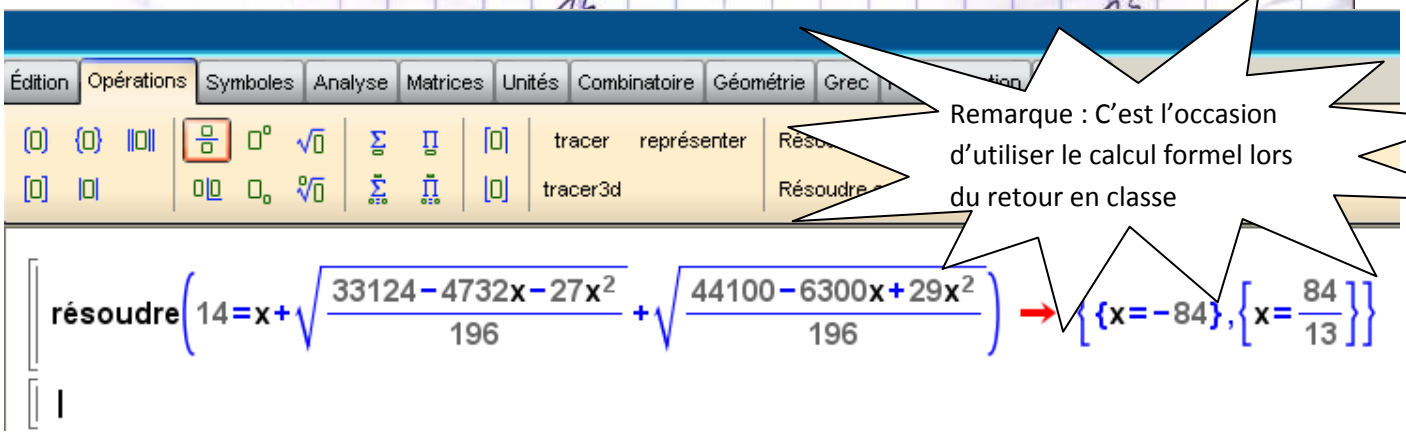
En partant de la relation

$14 = i + h + x$

On obtient une équation impossible (je pense) à résoudre avec nos connaissances actuelles.

Mais on conjecture environ 6,46 à la calculatrice

$$14 = x + \frac{\sqrt{33124 - 4732x - 27x^2}}{14} + \frac{\sqrt{44100 - 6300x + 29x^2}}{14}$$



Remarque : C'est l'occasion d'utiliser le calcul formel lors du retour en classe

Donc, deuxième essai :

On garde $e = \frac{15}{14}x$ et $g = 15 - \frac{15x}{14}$

et on utilise Al Kashi dans ABC

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(AB)(BC)\cos\hat{B}$$

$$169 = 196 + 225 - 420\cos\hat{B}$$

$$\frac{-252}{-420} = \cos\hat{B} = \frac{3}{5}$$

On utilise la trigo dans EGB (qui est rectangle)

$$\cos\hat{B} = \frac{i}{g} = \frac{3}{5} \qquad 3g = 5i$$

$$3\left(15 - \frac{15x}{14}\right) = 5i$$

$$45 - \frac{45x}{14} = 5i$$

$$i = 9 - \frac{9x}{14}$$

On utilise alors Pythagore dans EGB.

$$x^2 + i^2 = g^2$$

$$x^2 + \left(9 - \frac{9x}{14}\right)^2 = \left(15 - \frac{15x}{14}\right)^2$$

$$0 = x^2 + 81 - \frac{162x}{14} + \frac{81x^2}{196} - 225 + \frac{450x}{14} - \frac{225x^2}{196}$$

$$\frac{52x^2}{196} + \frac{288x}{14} - 144 = 0$$

On calcule $\Delta = \left(\frac{288}{14}\right)^2 - 4(-144)\left(\frac{52}{196}\right)$

$$= 576$$

$$x_1 = \frac{-\frac{288}{14} - \sqrt{576}}{\frac{2 \times 52}{196}} = -84$$

$$x_2 = \frac{-\frac{288}{14} + \sqrt{576}}{\frac{2 \times 52}{196}} = \frac{84}{13}$$

Comme une longueur ne peut être < 0, alors $x = \frac{84}{13}$ soit environ 6,46, ce qui confirme la première conjecture !