Eléments de correction des Olympiades Premières 2021 de l'académie d'Amiens

Exercice national 1 :

1., 2. et 3.

n	6	101	361	$2\,021$
Les diviseurs de n	$1;\ 2;\ 3;\ 6$	$1; 101$	$1; 19; 361$	$1, 43; 47; 2\,021$
$S(n)$	12	102	381	$2\,112$
$2S(n)$	24	204	762	$4\,224$
$(n+1)N(n)$	28	204	$1\,086$	$8\,088$

4. *a.* Chaque diviseur de n figure deux fois dans la somme $T(n)$, donc $T(n) = 2S(n)$.
b. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ fait apparaître $ab - a - b + 1$ comme produit de nombres positifs, d'où le résultat.
c. Application au cas $dq = n$.
d. Dans l'écriture de $T(n)$, on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l'inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu'une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de n : $(d-1)(q-1) = 0$.
b. Les seules valeurs admissibles pour d sont donc 1 ou n. n est donc un nombre premier.
c. Réciproquement, si n est premier, ses diviseurs sont 1 et n, leur somme est $n+1$ et leur effectif 2, donc l'égalité (*) est satisfaite.

Exercice national 2 (Spé) :

A. Quelques exemples

1. ***a.*** $7 = 2 + 5$ et $7^2 = 2 \times 22 + 5$, donc 7 est 22 −décomposable.
On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d'entiers inférieurs :
$0 \times 10 + 7 = 7, 1 \times 10 + 8 = 18, 2 \times 10 + 5 = 25, 3 \times 10 + 4 = 34, 4 \times 10 + 3 = 43, 5 \times 10, 6 \times 10$ et 7×10 sont supérieurs à 49. Donc 7 n'est pas 10 −décomposable.
b. $45 = 20 + 25$ et $2\,025 = 20 \times 100 + 25$ donc 45 est 100 −décomposable.
2. ***a.*** Dire que a est 1 −décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = q \times 1 + r$, ce qui nécessite $a = a^2$. 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant $(0,0)$ et $(1,0)$ (et aussi $(0,1)$).
b. Dire que a est 2 −décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = 2q + r$, ce qui nécessite que $a(a-1) = q$. Comme $q \leq a$ et qu'on parle d'entiers positifs, il s'ensuit que $a - 1 \leq 1$. Les trois possibilités sont donc $2, 1$ et 0. On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.
3. ***a.*** $N^2 = N \times N = 0$ donne la réponse, N est N −décomposable.
b. $(N-1)^2 = (N-2) \times N + 1$ donne la réponse : $(N-1)$ est N −décomposable.
c. Une égalité telle que $4 = a \times N + b$ ne saurait avoir lieu que pour $a = 0$, sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour $a = 0$, on obtient $4 = 2$.

B. Une étude des nombres N −décomposables

1. *a.* Si k est N −décomposable, il existe des entiers q et r tels que $k = q + r$ et $k^2 = q \times N + r$. Comme q et r sont inférieurs ou égaux à k, on en déduit $k^2 \leq k(N + 1)$, et $k \leq N + 1$.

Est-il possible que k soit égal à $N + 1$?

Si cela était, il existerait un entier a tel que $(N + 1)^2 = aN + (N + 1 - a)$, ou encore $N(N + 1) = a(N - 1)$, qui conduit à $a > N + 1$, impossible dans notre hypothèse. Donc $k \leq N$.

b. Les entiers 3 −décomposables sont inférieurs ou égaux à 3 d'après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour 3 et 2. 1 et 0 sont, quel que soit N, N −décomposables (avec les couples $(0, 0)$ et $(0,1)$).

La partie A a aussi résolu le cas de 2 comme non 4 −décomposable. Il ne reste donc que 4, 3, 1 et 0 qui le soient.

2. Supposons que pour un couple (k, N), il existe deux entiers p et q tels que :

$$\begin{cases} k^2 = pN + k - p \\ k^2 = qN + k - q \end{cases}$$

Nécessairement, $(N - 1)(p - q) = 0$ et comme $N \geq 2$ l'unicité est démontrée.

3. *a.* On peut écrire $k^2 = qN + k - q$ (en utilisant directement $k = q + r$), ou encore $k^2 - k - q(N - 1) = 0$.

L'existence du couple (q, r) induit le fait que k est solution de cette équation.

b. Réciproquement, s'il existe un entier q compris entre 0 et k tel que k soit solution de cette équation, alors en posant $r = k - q$, on revient bien au système (S).

c. Essayons d'écrire différemment k et $N - 1$ pour faire apparaître l'équation précédente :

$$k^2 - k = 2^{2p-2}(2^p - 1)^2 - 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^{p-1} - 1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^{2p-1} - 2^p + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)(2^p + 1)(2^{p-1} - 1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)(2^{2p} - 1)$$

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur N −1, précédé de $2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$, entier inférieur à k.

4. Calculons $(N - k)^2 - (N - k) = N(N - 1) + k^2 - k - 2Nk + 2k = (N - 1)(N - 2k + q)$

(la lettre q qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à k). Le dernier facteur est bien inférieur à $N - k$ (c'est $N - k - (k - q)$).

5. Posons $N = 2k$ et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier q compris entre 0 et k tel que $k^2 - k - q(2k - 1) = 0$. On a donc $k(k - 1) = q(2k - 1)$, qui assure que $k(k - 1)$ est un multiple de $2k - 1$. D'où on tire que $4k(k - 1)$, qui est égal à $(2k - 1)^2 - 1$ est lui aussi un multiple de $(2k - 1)$ et donc 1 en est un aussi. Impossible.

6. On a montré que les entiers N −décomposables sont inférieurs à N. D'après la question précédente, $\frac{N}{2}$ – un entier dans le cas où N est pair – ne l'est pas. Par ailleurs, si k est N −décomposable, $N - k$ l'est aussi. On peut donc regrouper les entiers N −décomposables par paire $\{k, N - k\}$. Il y en a donc un nombre pair.

7. Posons $N - 1 = p$. La condition nécessaire et suffisante : il existe une entier q inférieur ou égal à k tel que $k(k - 1) - qp = 0$ indique que p divise $k(k - 1)$, et comme p est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont $k = 0, k = 1, k = N - 1, k = N$.

8. La condition $k(k - 1) = qN$. Montre que les nombres N tels que k soit N −décomposable sont des diviseurs de $k(k - 1)$. Il y en a donc un nombre fini.

Exercice national 2 (Non spé) :

1. *a.* proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
b. proposition vraie car pour tous les entiers n et p non nuls, $\frac{1}{n}\times\frac{1}{p}=\frac{1}{np}$ et np est un entier non nul.
c. proposition fausse car, par exemple, $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
2. *a.* On peut proposer les deux décompositions $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. On en déduit qu'il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel.
b. $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ et $\frac{9}{10}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
3. *a.* Comme la base de la pyramide SABCD est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en S, la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est $4\text{AB}+4\text{SA}$.
Donc $4\text{AB}+4\text{SA}=\frac{4}{30}+\frac{4}{20}=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ qui est une fraction égyptienne. On en déduit que SABCD est une pyramide égyptienne.
b. Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, $4\text{AB}+4\text{SA}=\frac{4}{p}+\frac{4}{q}$.
Si $p<4$ ou $q<4$, alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a $\frac{4}{p}>1$ ou $\frac{4}{q}>1$ et, dans les deux cas, $4\text{AB}+4\text{SA}>1$. Donc $4\text{AB}+4\text{SA}$ ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc SABCD n'est pas une pyramide égyptienne.
On en déduit que si SABCD est une pyramide égyptienne alors $p\geq 4$ et $q\geq 4$.
c. SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $4\text{AB}+4\text{SA}=\frac{1}{n}$.
Or, en réduisant au même dénominateur, $4\text{AB}+4\text{SA}=\frac{4}{p}+\frac{4}{q}=\frac{4p+4q}{pq}$
Donc SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n=\frac{pq}{4p+4q}$.
d. Par ce qui précède, SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n=\frac{pq}{4p+4q}$ qui s'écrit $4n(p+q)=pq$.
Pour tous entiers naturels p et q non nuls, $4n(p+q)$ est un nombre pair.
Si p et q sont des nombres impairs alors pq est aussi un nombre impair.
L'égalité $4n(p+q)=pq$ est impossible si p et q sont impairs.

Exercice académique 1 (Commun) : Memento

Présentation du jeu

1. Par exemple :

$\triangle$	$\triangle$	∇	∇	$\star$	$\star$

2. Impossible, puisqu'il y a trois paires, chaque paire devant être tirée une fois.
3. Au maximum, la première paire est retirée après 5 tirages, la seconde après 3 tirages et la dernière après 1 tirage. Le nombre maximum de tirages nécessaire est donc $5+3+1=9$. Voici une configuration pour laquelle ce maximum est atteint :

$\triangle$	∇	$\star$	$\star$	∇	$\triangle$

4. On considère un alignement de n paires.
   a. Le nombre de tirages nécessaire est supérieur ou égal à n puisque chaque paire doit être tiré une fois. De plus, lorsque les cartes sont rangées par paires, comme dans la question 1, alors le jeu est résolu en n tirages. Le nombre minimum de tirages nécessaires est donc n.
   b. Au maximum, la première paire est obtenue après $2n-1$ tirages (ce qui arrive lorsque la carte appairée à la première carte de la file se trouve en dernière position). Une fois cette paire enlevée, la deuxième paire est obtenue au maximum après $2n-1-2=2n-3$ tirages, et ainsi de suite.
   Le nombre maximum de tirages nécessaires est donc bien $M_n=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1$.
   c. On a :
   $$M_n=(1+2+\cdots+(2n-1)+2n)-(2+4+\cdots+2n)=\frac{2n(2n+1)}{2}-2(1+2+\cdots+n)$$
   donc $M_n=\frac{2n(2n+1)}{2}-2\frac{n(n+1)}{2}=n(2n+1-n-1)=n^2$.

5.
   a. $m_1=p_1=1$.
   b. On obtient la première paire au tirage k si et seulement si la première carte et la carte en position $k+1$ portent le même symbole. Ainsi, $p_2=\frac{2\times1+2\times2+2\times3}{6}=2$.

k	1	2	3	4
Nombre d'alignements à 2 paires pour lesquels la première paire est obtenue au k-ième tirage	2	2	2	0

   Pour m_2, on peut remplir un tableau similaire :

k	1	2	3	4
Nombre d'alignements à 2 paires résolus en k tirages	0	2	2	2

   En effet, quitte à permuter les deux symboles, les alignements possibles sont :

$\triangle$ $\triangle$ $\star$ $\star$	$\triangle$ $\star$ $\triangle$ $\star$	$\triangle$ $\star$ $\star$ $\triangle$
Résolu en 2 tirages	Résolu en 3 tirages	Résolu en 4 tirages

   c. En listant les différents alignements possibles, comme pour p_2, on trouve : $p_3=\frac{6\times1+6\times2+6\times3+6\times4+6\times5}{6\times5}=3$.
   d. Pour n paires, la première paire peut être obtenue aux tirages 1, 2,…,$2n-1$. De plus, le nombre a d'alignements pour lequel la première paire est obtenue au tirage k, avec $k\in\{1,2,\dots,2n-1\}$ est constant : en effet, un tel alignement est obtenu en plaçant deux carte appairées en positions 1 et $k+1$, et en réarrangeant les $2n-2$ cartes restantes (ce qui ne dépend pas de k).
   Ainsi $p_n=\frac{a\times1+a\times2+\cdots+a\times(2n-1)}{a\times(2n-1)}=\frac{1+2+\cdots+(2n-1)}{2n-1}=\frac{1}{2n-1}\times\frac{(2n-1)\times2n}{2}=n$.
   e. Pour retourner toutes les cartes d'un alignement de $n+1$ paires, il faut déjà retourner la première paire (ce qui se fait en moyenne en p_{n+1} tirages) puis retourner les n paires restantes, ce qui se fait en moyenne en m_n tirages. Ainsi $m_{n+1}=p_{n+1}+m_n$.
   f. L'algorithme donné attribue successivement à m les valeurs $1, 3, 6$ et 10, ce qui correspond à m_4. Pour afficher m_n, il suffit de modifier la boucle « pour » de manière à ce que p aille de 2 à n.
   g. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq2$. D'une part, en simplifiant cette somme télescopique : $(m_2-m_1)+(m_3-m_2)+\cdots+(m_n-m_{n-1})=m_n-m_1=m_n-1$. D'autre part : $(m_2-m_1)+(m_3-m_2)+\cdots+(m_n-m_{n-1})=p_2+p_3+\cdots+p_n=2+3+\cdots+n=1+2+3+\cdots+n-1=\frac{n(n+1)}{2}-1$.
   On en déduit que $m_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice académique 2 (Spé) : Le processus de Hiéron

Partie A

1.

n	**suite de nombres**	**L(n)**
2	$2\to3\to1$	3
3	$3\to1$	2
4	$4\to8\to15\to5\to9\to3\to1$	7
5	$5\to9\to3\to1$	4
6	$6\to2\to3\to1$	4
7	$7\to14\to27\to9\to3\to1$	6
8	$8\to15\to5\to9\to3\to1$	6
9	$9\to3\to1$	3
10	$10\to20\to39\to13\to26\to51\to17\to33\to11\to21\to7\to14\to27\to9\to3\to1$	16

2. Le processus donne : $3^p \to 3^{p-1} \to 3^{p-2} \to \ldots \to 1$

Ainsi : $\mathrm{L}\left(3^p\right) = p+1$.

3. a. Pour $n = 9k+2$, le début du processus est:

$$9k+2 \to 2(9k+2)-1 = 18k+3 \to 6k+1$$

Ainsi : $\mathrm{L}(9k+2) = \mathrm{L}(6k+1)+2$.

b. Pour $n = 9k+5$, le début du processus est:

$$9k+5 \to 2(9k+5)-1 = 18k+9 \to 6k+3 \to 2k+1$$

Pour $n = 9k+6$, le début du processus est:

$$9k+6 \to 3k+2 \to 2(3k+2)-1 = 6k+3 \to 2k+1$$

Ainsi : $\mathrm{L}(9k+5) = \mathrm{L}(9k+6)$.

4. $3^{700}+1 \to 2(3^{700}+1) = 2\times3^{700}+2 \to 2(2\times3^{700}+2)-1 = 2^2\times3^{700}+3 \to 2^2\times3^{699}+1$

$2^2\times3^{699}+1 \to 2(2^2\times3^{699}+1) = 2^3\times3^{699}+2 \to 2(2^3\times3^{699}+2)-1 = 2^4\times3^{699}+3 \to 2^4\times3^{698}+1$

On généralise : soit k un entier compris entre 0 et 700.

$2^{2k}\times3^{700-k}+1 \to 2(2^{2k}\times3^{700-k}+1) = 2^{2k+1}\times3^{700-k}+2 \to 2(2^{2k+1}\times3^{700-k}+2)-1 = 2^{2k+1}\times3^{700-k}+3 \to 2^{2(k+1)}\times3^{700-(k+1)}+1$

On enchaîne des cycles du type précédent pour k allant de 1 à 673, car : $\frac{2021}{3}$; 673,67 ;

et ainsi : $2021 = 3\times673+2$

Le 2021$^{\text{ème}}$ terme de la suite partant de $3^{700}+1$ est $2^{2\times673+1}\times3^{700-673}+2 = 2^{1347}\times3^{27}+2$

Partie B

Supposons qu'il existe deux entiers p et q tels que : $n\to p\to q\to n$

Alors $n > 10$ d'après la question 1. de la partie A.

1er cas : $n = 3k$ avec k entier supérieur à 3.

Alors $p = k$

1er sous cas : k est un multiple de 3

Alors $q = \frac{1}{3}k$

$q \to n$

$\frac{1}{3}k \to 3k$: impossible car $3k > 2\times \frac{1}{3}k$

2ème sous-cas : $k-1$ est un multiple de 3

Alors $q = 2k$

$q \to n$

$2k \to 3k$

1er sous-sous-cas :	2ème sous-sous-cas :
$2\times 2k = 3k$	$2\times 2k - 1 = 3k$
$4k = 3k$	$4k - 1 = 3k$
$k = 0$: impossible	$k = 1$: impossible

3ème sous-cas : $k-2$ est un multiple de 3

Alors $q = 2k-1$

$q \to n$

$2k-1 \to 3k$

1er sous-sous-cas :	2ème sous-sous-cas :
$2(2k-1) = 3k$	$2(2k-1) - 1 = 3k$
$4k - 2 = 3k$	$4k - 3 = 3k$
$k = 2$: impossible	$k = 3$: impossible

2ème cas : $n = 3k + 1$, avec k entier supérieur à 3.

Alors $p = 2(3k + 1) = 6k + 2$

$q = 2(6k + 2) - 1 = 12k + 3$

$n = \frac{1}{3}(12k + 3) = 4k + 1$

Ainsi : $3k + 1 = 4k + 1$ d'où $4k + 1 - (3k + 1) = k = 0$: impossible

3ème cas : $n = 3k + 2$, avec k entier supérieur à 2.

Alors $p = 2(3k + 2) - 1 = 6k + 3$

$q = \frac{1}{3}(6k + 3) = 2k + 1$

1^{er} sous-cas : $n = \frac{1}{3}(2k+1)$

$$3k+2 = \frac{1}{3}(2k+1)$$
$$3k - \frac{2k}{3} = \frac{1}{3} - 2$$
$$\frac{7k}{3} = \frac{-5}{3}$$
$$k = \frac{-5}{7} : \text{impossible}$$

$2^{ème}$ sous-cas : $n = 2(2k+1)$

$$3k+2 = 2(2k+1)$$
$$3k-4k = 2-2$$
$$-k = 0$$
$$k = 0 : \text{impossible}$$

$3^{ème}$ sous-cas : $n = 2(2k+1)-1$

$$3k+2 = 2(2k+1)-1$$
$$3k-4k = 2-1-2$$
$$-k = -1$$
$$k = \frac{1}{3} : \text{impossible}$$

Il est impossible que la suite partant de *n* soit périodique de période 3.

Exercice académique 2 (Non Spé) : Une drôle de somme

1. $\frac{2}{3} \oplus \frac{3}{8} = \frac{2+3}{3+8} = \frac{5}{11}$ et $\frac{2}{3} \oplus \frac{3}{7} = \frac{2+3}{3+7} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
2. $2020 \oplus \frac{1}{2021} = \frac{2020+1}{1+2021} = \frac{2021}{2022}$.
3. a. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et $\frac{c}{d}$ la FFI de y, comme $a, c \in \mathbb{N}, a + c \in \mathbb{N}$. Comme $b, d \in \mathbb{N}^*, b + d \in \mathbb{N}^*$. Donc $x \oplus y \in \mathbb{Q}^+$.

   b. Pas nécessairement. Par exemple, si $x = \frac{1}{3}$ et $= \frac{1}{5}$, $x \oplus y = \frac{1+1}{3+5} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
4. a. C'est faux. Par exemple $\frac{1}{3} \oplus 0 = \frac{1+0}{3+1} = \frac{1}{4}$.

   b. C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x : $x \oplus x = \frac{a+a}{b+b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = x$.

   c. C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y : $x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c+a}{d+b} = y \oplus x$.

   d. C'est faux. Par exemple : $(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}) \oplus \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \oplus \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ et $\frac{1}{2} \oplus (\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{5}) = \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   e. C'est vrai. Si $\frac{a}{b}$ est la FFI de x et si $\frac{c}{d}$ la FFI de y, alors la FFI de $\frac{1}{x}$ est $\frac{b}{a}$ et celle de $\frac{1}{y}$ est $\frac{d}{c}$.

   $\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{x \oplus y}$.

5. Soit $\frac{e}{f}$ la FFI de $x \oplus y$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$, tel que $a + c = \lambda e$ et $b + d = \lambda f$.

   Dans le repère (O, I, J) :

   $O(0;0)$, $M_x(b;a)$, $M_y(d;c)$, $M_{x\oplus y}(f;e) = \frac{1}{\lambda}(b+d;a+c)$.

   Les coordonnées du milieu N de $[M_x M_y]$ sont $\frac{1}{2}(b+d;a+c)$. On constate que les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM_{x\oplus y}}$ sont colinéaires, donc O, N et $M_{x\oplus y}$ sont alignés.

   La droite $(OM_{x\oplus y})$ est donc la médiane issue de O dans le triangle $OM_x M_y$.

6. Soient A, B, C, D et E les points de coordonnées respectives $(0;a), (b;0), (0;c), (d;0)$ et $(d;a)$.

   L'aire recherchée : Aire($ODEA$) – Aire(ODM_y) – Aire($M_y E M_x$) – Aire($OM_x A$)

   $$= ad - \frac{cd}{2} - \frac{(a-c)(d-b)}{2} - \frac{ab}{2} = \frac{ad-bc}{2}.$$