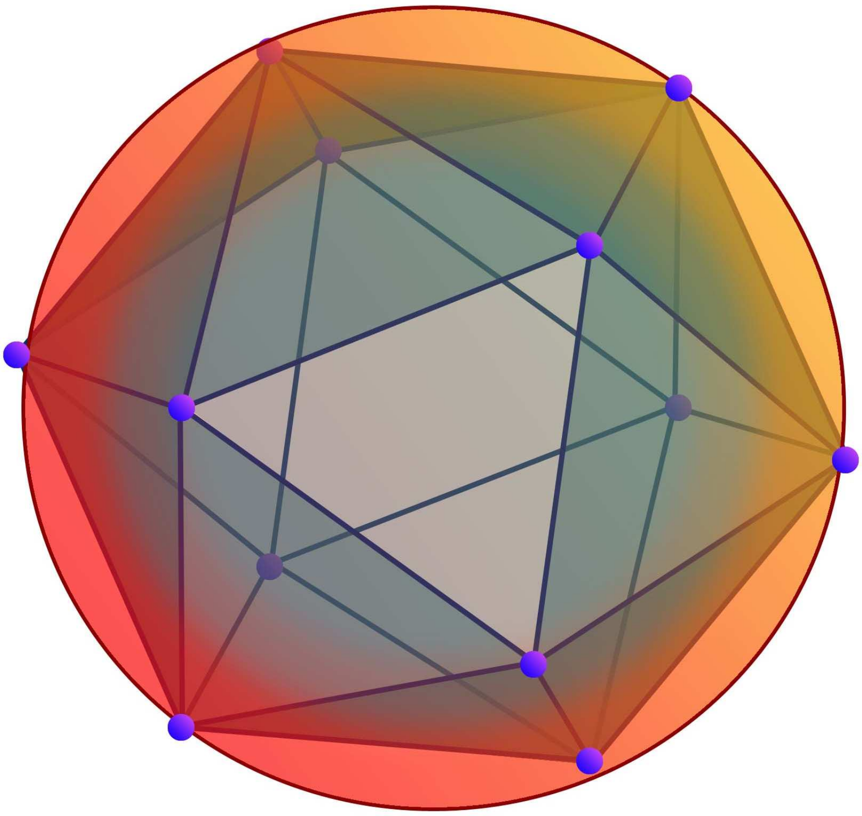
De l'icosaèdre au dôme géodésique



Dossier technique

---

1 Les solides

1. Citez quelques objets ayant la forme d'un icosaèdre tronqué ?
2. Combien de faces possède un icosaèdre tronqué ? De quelles formes sont-elles ?
3. Combien de sommets et d'arêtes possède-t-il ?
4. Quelles différences y a-t-il entre un icosaèdre et un icosaèdre tronqué ?
5. D'où vient le nom icosaèdre ?
6. Est-ce un solide de Platon ?

2 Autour du nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

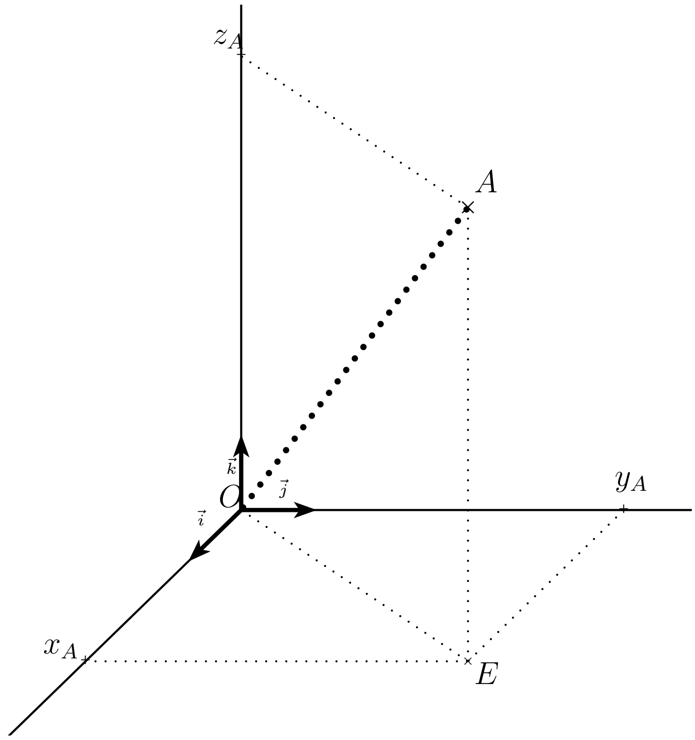
1. Comment s'appelle ce nombre ?
2. Démontrez que ce nombre vérifie l'égalité suivante : $\phi^2 = \phi + 1$
3. Exprimez $\dfrac{1}{\phi}$ en fonction de ϕ
4. Citez des exemples dans le domaine artistique et le domaine architectural utilisant ce nombre. Expliquez à l'aide de croquis.

3 Une formule pour calculer les longueurs dans l'espace

Cette année vous avez vu comment on pouvait se placer dans un repère pour placer des points du plan. Ici nous avons besoin d'une troisième dimension, nous allons donc utiliser un repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Pour donner les coordonnées d'un point il faut donc 3 nombres : $A(x_A; y_A; z_A)$

- x_A est l'abscisse de A
- y_A est l'ordonnée de A
- z_A est la côte de A

1. Repérez sur la figure ci-contre où se trouvent des angles droits.
2. Soit $A(2; 3; 4)$, calculez les longueurs OE, EA, puis OA.
3. Dans le cas général, si A a pour coordonnées $(x; y; z)$ conjecturez une formule pour calculer directement la longueur OA.



Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

4 Sommets d'un icosaèdre

On appelle ϕ le nombre réel : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ appelé nombre d'or (au cas où vous ne l'auriez pas trouvé avant !). On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où l'on considère les points de coordonnées : Voir figure

$A\,(0; \phi; 1)$	$B\,(\phi; 1; 0)$	$C\,(0; \phi; -1)$	$D\,(-\phi; 1; 0)$
$E\,(-1; 0; \phi)$	$F\,(1; 0; \phi)$	$G\,(\phi; -1; 0)$	$H\,(0; -\phi; 1)$
$I\,(-\phi; -1; 0)$	$J\,(-1; 0; -\phi)$	$K\,(1; 0; -\phi)$	$L\,(0; -\phi; -1)$

Démontrez que tous ces points sont sur une sphère de centre $O(0; 0; 0)$ dont vous préciserez le rayon. On appellera ce nombre le ***rayon de l'icosaèdre***.

5 Faces de l'icosaèdre

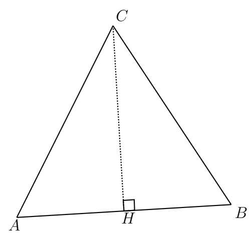
1. Quelle est la nature du triangle ABC ? (Prouvez-le).
2. Citez d'autres triangles de même nature.
3. Donnez les longueurs des arêtes de l'icosaèdre.
4. Les longueurs sont-elle proportionnelles au rayon ? Justifiez.

En résumé :
Si un icosaèdre est inscrit dans une sphère de rayon ...., ses arrêtes mesurent ....

Plus généralement :
Si un icosaèdre est inscrit dans une sphère de rayon R, ses arrêtes mesurent $l =$ ....

5. On construit un icosaèdre avec des allumettes de 5cm. Quel est le rayon de sa sphère circonscrite ?
6. Si l'on veut construire un icosaèdre d'un mètre de rayon, quelle doit être la taille de ses côtés ?

6 Calcul de l'aire latérale d'un icosaèdre de côté 2 cm



1. Calculez l'aire en cm^2 d'un triangle équilatéral ABC de côté 2cm.
2. Déduisez-en l'aire latérale d'un icosaèdre de côté 2.
3. L'aire est-elle proportionnelles au rayon ? Justifiez.

En résumé, dans un icosaèdre :
Si les arêtes mesurent ...., l'aire mesure ....

Plus généralement :
Si les arêtes mesurent l, l'aire mesure $\mathcal{A} =$............

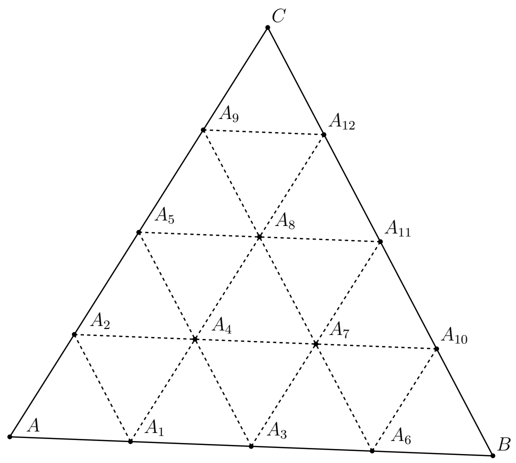
Si le rayon mesure R, l'aire mesure $\mathcal{A} =$............

4. Un icosaèdre est réalisé avec des tôles d'acier d'un millimètre d'épaisseur et pesant 8 kg/m^2. Une fois terminé, il pèse 5kg. Quel est son rayon ?
5. On réalise un icosaèdre en balsa dont les côtés des faces mesurent 30 cm. Quelle quantité de peinture faut-il prévoir sachant que la consommation moyenne est de 1L pour 10,5 m^2 ?

7 De l'icosaèdre au dôme géodésique...

Pour réaliser un dôme géodésique de fréquence f, on va : Voir figure

- Découper les côtés de chacune des faces de l'icosaèdre de départ en f morceaux de même longueur.
- Tirer des parallèles aux cotés passant par ces points (on note A_1 à A_{12} les intersections obtenues).
- Projeter les points A_1 à A_{12} sur la sphère circonscrite en traçant les demi-droites $[OA_i)$ (On notera les points obtenus B_1 à B_{12})



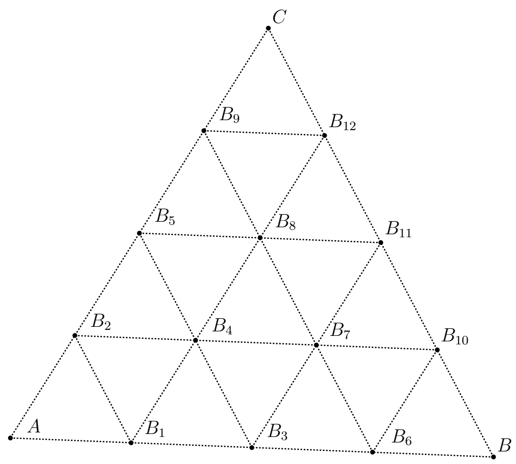
Pour un dôme géodésique fréquence 4.

A l'aide du logiciel GéoplanGéospace :

1. Charger la figure dome.g3w
2. Cacher toutes les arêtes pour ne laisser qu'une face.
3. Construire les points A_1 à A_{12}.
4. Combien de triangles obtient-on ? Quelle est leur nature ?
5. Construire les points B_1 à B_{12} à l'aide du logiciel.
6. Combien de triangles obtient-on ? Quelle est leur nature ?

En résumé :

Repasser en utilisant des couleurs pour représenter les côtés de même longueur. Indiquer en légende les longueurs que représente chaque couleur.



Donner des formules pour calculer chaque longueur en fonction du rayon R :