Université de Picardie Jules Verne **2010-2011**
UFR des Sciences - LAMFA

PAF - Formation Enseignement des Mathématiques - 28 janvier 2011

Mathématiques : statistiques et simulation

Dans ce document, je vous propose une première liste d'exercices traitant de différents thèmes de Probabilités et Statistique issus des programmes des classes de seconde et première ; l'algorithmique et la simulation sont présents dans plusieurs d'entre eux. Les questions que vous pourriez vous poser à propos de ces exercices permettront d'alimenter les échanges que nous aurons lors de la formation.

Bon courage dans la préparation de ces exercices.

Cordialement.

Stéphane Ducay le 12 janvier 2011

Effectifs, fréquences, histogrammes, boîte à moustaches

Exercice 1. Brice a lancé 50 fois un dé. Marie a aussi lancé un certain nombre de fois un dé. Ils ont obtenu les résultats suivants :

Chiffre obtenu	1	2	3	4	5	6
Effectif de Brice	9	12	8	7	5	9
Fréquence de Marie	0,24	0,12	?,??	0,17	0,08	0,19

1) Interpréter la fréquence 0,12 de Marie en terme de pourcentage.
2) Quelle est la fréquence du chiffre 3 obtenu par Marie ?
3) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.
   a) Marie a obtenu moins de 3 que de 1 ;
   b) La proportion de 2 de la série de Brice est la même que la proportion de 2 de celle de Marie. Donner deux raisonnements.
4) Pour chacune des deux séries de lancers :
   a) calculer la moyenne et l'écart-type ;
   b) déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile, l'écart interquartile.

Exercice 2. Le service qualité d'une entreprise de conserverie a pesé un échantillon de 100 boîtes de conserve en fin de chaîne de production et il a obtenu le tableau statistique suivant :

Masse (en g)	$[915 ; 919]$	$]919 ; 923]$	$]923 ; 927]$	$]927 ; 931]$	$]931 ; 935]$
Nombre de boîtes	12	25	33	28	?

1) Combien y a-t-il de boîtes dont la masse est comprise entre 931 et 935 g ?
2) a) Construire l'histogramme représentant cette série statistique.
   b) Le tableau statistique et l'histogramme donnent-ils les mêmes informations ?
3) a) Etablir un tableau faisant apparaître les effectifs et les fréquences cumulées croissants.
   b) Représenter graphiquement ces résultats.
   c) En déduire graphiquement la médiane, le premier et le troisième quartile.
   d) Représenter ces résultats par une boîte à moustaches.

Exercice 3. On a demandé à cent élèves d'une classe de seconde le nombre de SMS qu'ils envoyaient au cours d'une semaine :

Nombre de SMS	$[0 ; 15]$	$]15 ; 25]$	$]25 ; 35]$	$]35 ; 45]$	$]45 ; 70]$
Nombre d'élèves	15	18	22	16	29

1) Représenter cette série avec un histogramme.
2) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série. Interpréter les résultats obtenus.
3) Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile.

Exercice 4.

1) On a n valeurs dans une liste L[i] et on considère l'algorithme suivant :

Entrée
Saisir(n) ;
Initialisation
$i := 1$; S :=L[1];
Tantque $i <= n$ faire
    $i := i + 1$;
    Si L[i] $< S$ alors $S := L[i]$;
Fin Tantque
Sortie
Afficher(S) ;

a) On considère la liste suivante : 2 ; 3 ; 1 ; 5 ; -1.
Faire fonctionner l'algorithme sur cette liste. Que représente S ?

b) Modifier cet algorithme pour obtenir le maximum de la liste.

2) Ecrire un algorithme permettant de calculer la moyenne d'une liste L[i] de n notes d'élèves :

a) avec une boucle Pour

b) avec une boucle Tantque

3) On considère une liste L[i] de n nombres dont on veut calculer la médiane. On utilise un algorithme dont le principe est le suivant pour n impair :

On répète $\frac{n-1}{2}$ fois les instructions suivantes :

- on note le rang du plus petit nombre de la liste ;
- on remplace le plus petit nombre de la liste dont on a noté le rang précédemment par le dernier nombre de la liste ;
- on supprime de dernier nombre de la liste ;

fin de la répétition ;

On détermine le plus petit nombre de la liste.

On affiche le plus petit nombre de la liste.

a) Faire fonctionner le programme ci-dessus avec les deux listes suivantes et vérifier que l'on obtient bien la médiane :

liste 1 : 3 ; 5 ; 1 ; 7 ; 2 ; 10 ; 11.
liste 2 : 2 ; 5 ; 2 ; 10 ; 3 ; 5 ; 1.

b) Expliquer pourquoi cet algorithme calcule la médiane.

c) Modifier l'algorithme ci-dessus de façon à calculer la médiane lorsque n est pair.

Intervalle de fluctuation, simulation

Exercice 5.

1) Un sac de graines de fleurs doit contenir 23 % de graines de tulipes. On choisit un échantillon de 100 graines et on compte 17 graines de tulipes. L'intervalle de fluctuation du pourcentage de graines de tulipes est environ égal à $[15 ; 31]$ au seuil 95 %. Peut-on admettre au seuil 95 % que la proportion de graines de tulipes dans le sac est égal à 23 % ?

2) Lors d'un sondage, 48 % des 1000 personnes d'un échantillon ont déclaré vouloir voter pour un candidat. Donner une estimation du pourcentage des voix recueillies par le candidat à l'aide d'un intervalle de confiance au seuil de 95 %.

Exercice 6. Une urne contient 42% de boules blanches et 58% de boules noires.

1) Donner un intervalle de fluctuation de la fréquence de boules blanches obtenues dans un échantillon de 50 boules tirées avec remise dans l'urne.

2) Ecrire une formule Excel permetant de simuler le tirage au hasard d'une boule de l'urne.

3) Comment remplir une feuille de calcul pour simuler :

a) le tirage d'un échantillon de taille 50 ?

b) la fréquence de boules blanches d'un échantillon de taille 50 ?

4) Comment mettre en évidence à l'aide du tableur l'intervalle de fluctuation obtenu au 1) ?

Probabilité sur un ensemble fini, probabilité d'un événement, variable aléatoire

Exercice 7. Une classe de Terminale compte 33 élèves dont 12 filles. On compte 4 élèves majeurs dont 3 garçons.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

	Filles	Garçons	
Majeur(e)		3	4
Mineur(e)			
	12		33

b) Représenter ces données par un diagramme d'ensembles.

2) On choisit un élève au hasard dans la classe. Quelle est la probabilité que ce soit :
a) une fille mineure ? b) une fille ?
c) un(e) mineur(e) ? d) une fille ou un(e) mineur(e) ?

3) a) Quel est le pourcentage de filles mineures dans la classe ?
b) Quelle est la fréquence de filles mineures dans la classe ?

Exercice 8. On dispose de deux urnes. L'urne 1 contient 3 boules : 2 blanches et 1 noire. L'urne 2 contient 4 boules : 3 noires et 1 blanche. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

1) Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche.

Exercice 9. Dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on tire deux boules avec remise. On effectue le produit des deux nombres obtenus et on note le chiffre unité du nombre produit.

1) a) Déterminer l'univers associé à cette expérience à l'aide d'un tableau à double entrée.
b) Déterminer les probabilités de tous les événements élémentaires.
c) Comment présenter ces résultats avec la variable aléatoire X qui à chaque tirage de deux boules avec remise.associe le chiffre unité du nombre produit des deux nombres obtenus.

2) a) Effectuer à l'aide d'un tableur la simulation de 1000 tirages
b) Calculer la fréquence de chaque résultat possible.
c) Comparer avec les probabilités du 1).

Exercice 10. Une boîte contient 10 boules. Sur chacune d'elles on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-contre :

Nombre inscrit	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10 euros, tire une boule au hasard et reçoit la somme (en euros) inscrite sur la boule. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1) Le joueur joue une fois. On appelle p_1 la probabilité qu'il perde de l'argent (c'est-à-dire qu'il reçoive moins de 10 euros à l'issue du tirage) et p_2 la probabilité qu'il reçoive plus de 10 euros. Donner p_1 et p_2.

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le "gain" du joueur (une perte est un "gain" négatif). Par exemple, s'il tire le nombre 12, son "gain" est +2 ; s'il tire le 6, son "gain" est –4.
a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
b) Donner la loi de probabilité de X et recopiant et complétant le tableau suivant :

Valeurs de X : x_i	5	6	10	11	12	13	14
$p_i = P(X = x_i)$	1	2	1	3	1	1	1

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Que représente $E(X)$ pour le joueur ?
d) calculer la variance et la valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart-type de X.

3) Il s'agit maintenant, en changeant le nombre sur une boule, de rendre ce jeu équitable, c'est-à-dire de rendre l'espérance mathématique nulle. Proposer une solution.

4) On revient au jeu initial. A l'aide d'un tableur, proposer une simulation de 500 parties de ce jeu (une partie correspondant à un tirage) ; calculer les fréquences de chaque valeur du "gain", puis la moyenne du gain pour les 500 parties. Qu'observe-t-on ?

Bibilographie : Maths 2^e - symbole - Belin et BTS industriels du Gr A - Maths Tome 2 - Foucher