Université de Picardie Jules Verne **2011-2012**
UFR des Sciences - LAMFA

PAF - Formation Enseignement des Mathématiques - vendredi 20 janvier 2012

Mathématiques : statistiques et simulation

Dans ce document, je vous propose une deuxième liste d'exercices traitant de différents thèmes de Probabilités et Statistique issus du projet de programme des classes de terminale.

Exercice 1 *Intervalle de fluctuation et prise décision*

Le responsable de la maintenance des machines à sous d'un casino doit vérifier qu'un certain type de machine est bien réglée sur la probabilité de succès de 0,06. Lors du contrôle d'une machine, il constate qu'elle a fourni 8 succès sur 365 jeux. Doit-il remettre en question le réglage de la machine ?

Exercice 2 *Intervalle de fluctuation et prise décision*

On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français, le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%.

Un médecin d'une ville de ce département est surpris par le nombre important d'enfants le consultant pour des crises d'asthmes. Il décide de mener une étude statistique en choisissant de manière aléatoire 100 enfants de 11 à 14 ans de la ville. Il observe que 19 d'entre eux ont déjà eu une crise d'asthmes.

1) Utiliser un intervalle de fluctuation pour aider le médecin à décider s'il y a plus d'enfants ayant des crises d'asthmes dans la ville que dans le département.

2) Le médecin n'est pas convaincu par la décision obtenue et pense que le nombre d'enfants interrogés était insuffisant. Combien d'enfants faudrait-il interroger pour qu'une fréquence observée de 0,19 amène à conclure qu'il y a plus d'enfants ayant des crises d'asthmes dans la ville que dans le département.

Exercice 3 *Comparaison à l'aide de deux intervalles de confiance*

On veut comparer la qualité des sondages réalisés par deux instituts A et B en observant l'exactitude de leurs prévisions durant une année. Les résultats sont donnés ci-contre :

	A	B
Nombre de prévisions exactes	88	96
Nombre de prévisions fausses	12	24

1) Pour chacun des deux instituts, déterminer un intervalle de confiance de la proportion de prévisions exactes au niveau de confiance 95%.

2) Ces intervalles de confiance permettent-ils de dire que les instituts A et B ont des proportions de prévisions exactes différentes ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 *Loi normale et recherche d'un paramètre*

Une entreprise spécialisée dans la production de matériel optique, fabrique des lentilles en grande série. On a mesuré la vergence x, exprimée en dioptries, de 1000 lentilles de même type. On a obtenu la séérie statistique suivante des mesures x_i avec les effectifs correspondant :

x_i	$1,975$	$1,980$	$1,985$	$1,990$	$1,995$	$2,000$	$2,005$	$2,010$	$2,015$	$2,020$	$2,025$
n_i	8	27	67	118	176	200	180	122	64	28	10

1) a) Représenter cette série statistique à l'aide d'un diagrammme en bâtons.

b) Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série ; on donnera des valeurs approchée à 10^{-2} près

2) L'allure du diagramme précédent amène à considérer que la vergence d'une lentille, exprimée en dioptries, est une variable aléatoire X de loi normale. Considérons donc que X suit la loi normale $\mathcal{N}(2;0,01)$.

a) Comment a-t-on choisi les paramètres de cette loi ?

b) Une lentille est déclarée comme acceptable si sa vergence est comprise entre 1.98 et 2.02. Elle est déclarée defectueuse dans le cas contraire.

Calculer la probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse.

3) Un réglage de la machine permet de modifier l'écart-type sans changer la moyenne.

Considérons donc que X suit la loi normale $\mathcal{N}(2;\sigma)$. Déterminer σ pour que la probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse soit inférieure ou égale à 0,01.

Exercice 5 *Loi normale et recherche de deux paramètres*

La fluorescence de la chlorophylle α en milieu océanique exprimée en millivolts, est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. Une étude expérimentale a permis d'obtenir les estimations suivantes :

$$P(X \leq 37) = 0,9332 \text{ et } P(X \leq 23,5) = 0,2266.$$

1) Démontrer que m et σ sont solutions du système $\begin{cases} m + 1,5\sigma = 37 \\ m - 0,75\sigma = 23,5 \end{cases}$.

2) En déduire m et σ.

Exercice 6 *Loi normale et surbooking*

Une liaison aérienne entre deux villes est assurée par un avion de 140 places. La réservation est obligatoire. L'expérience a montré que la probabilité pour qu'une personne confirme sa réservation et retire son billet est égale à 0,8. On suppose que chaque personne se comporte indépendamment des autres.

La compagnie accepte n réservations, avec $n \geq 140$. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de réservations confirmées.

1) Justifier que X suit une loi binomiale Préciser son espérance et sa variance.
On admettra pour la suite de l'exercice que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,8n\ ;\ 0,4\sqrt{n}\right)$.

2) On cherche le nombre n de réservations que la compagnie peut accepter sachant qu'elle s'accorde un risque de 5% de ne pas pouvoir satisfaire toutes les personnes ayant réservé.

a) Justifier que ce risque se traduit par l'inégalité $P(X \leq 140) \geq 0,95$.

b) Démontrer que n est solution de l'inéquation $0.8n + 0,658\sqrt{n} - 140 \leq 0$.

c) Quel est le nombre maximum de réservations acceptables ?

Exercice 7 *Durée de vie d'un appareil et extension de garantie*

Une entreprise vend des appareils électriques. On admet que la durée de bon fonctionnement de chacun de ces appareils exprimée en mois est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire vérifiant $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour tout réel $t \geq 0$.

1) Déterminer $P(X > t)$ pour tout réel $t \geq 0$.

On suppose que chacun des appareils a une probabilité $p = 0,02$ de tomber en panne durant les 6 premiers mois de son utilisation.

2) a) Déterminer le paramètre λ.

b) Calculer la probabilité $P\left(X > 8 / X > 2\right)$, et comparer avec $P(X > 6)$. Interpréter ce résultat.

3) Cette firme a vendu n appareils. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui tombent en panne pendant les 6 premiers mois de leur utilisation.
Justifier que Y suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

4) On suppose que $n = 100$ et on utilise le tableur Excel pour obtenir la loi de probabilité de Y.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Loi Binomiale B(n,p)**			**n**	100		**p**	0,02
2								
3	**k**	0	1	2	3	4	5	6
4	**P(Y=k)**	0,1326	0,2707	0,2734	0,1823	0,0902	0,0353	0,0114
5	**F_Y(k)=P(Y≤k)**	0,1326	0,4033	0,6767	0,8590	0,9492	0,9845	0,9959
6								

On rappelle la syntaxe de la fonction Excel donnant la loi de probabilité Binomiale :

LOI.BINOMIALE(nombre_succès ; tirages ; probabilité_succès ; cumulative).

a) Donner les instructions à écrire dans les cellules B4 et B5, sachant qu'on souhaite recopier ces instructions dans les cellules C4, ..., H4 et C5, ..., H5.

b) Calculer la probabilité de l'événement $Y = 4$, puis celles de $Y < 4$ et $Y \leq 4$; on pourra expliquer comment obtenir ces résultats, puis utiliser les résultats de la feuille Excel ci-dessus.

c) L'entreprise envisage de vendre les appareils avec une garantie de 6 mois et pour cela majore de 3 euros le prix de chaque appareil. En revanche, elle assume durant cette période de garantie les réparations (toujours de même nature) estimées à 75 euros. La majoration du prix de vente par appareil suffit-elle à couvrir avec une probabilité supérieure ou égale à 0,90 les frais de réparation entraînés par cette politique de vente dans le cas où $n = 100$?

5) Reprendre la question 4)c) pour $n = 200$.

Complément (hors programme de lycée)

6) La firme a mené une étude statistique afin de modéliser la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Sur 100 lots de 100 appareils, elle a observé le nombre d'appareils tombant en panne (pendant les 6 premiers mois de leur utilisation). Les résultats sont les suivants :

nombre d'appareils en pannes	0	1	2	3	4	5	6
nombre de lots	14	26	27	19	8	5	1

On a alors utilisé le logiciel Excel pour traiter statistiquement ces résultats. Voici un extrait de la feuille de calcul :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**Test de khi-deux de conformité à une loi de Poisson**											
2												
3	x_i	0	1	2	3	4	5	6	TOTAL			
4	n_i	14	26	27	19	8	5	1	100			
5	$n_i x_i$	0	26	54	57	32	25	6	200		moyenne	2,0000
6	$n_i x_i^2$	0	26	108	171	128	125	36	594		variance	1,9400
7	p_i	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045	0,09022	0,03609	0,01656	1			
8	np_i	13,53	27,07	27,07	18,04	9,02	3,61	1,66	100			
9	d_i	0,02	0,04	0,00	0,05	0,12	0,54	0,26	1,02			
10												

a) Expliquer pourquoi on peut penser que Y pourrait suivre une loi de Poisson. Quel paramètre pourrait-on prendre pour la loi de Poisson ? Cette loi est-elle cohérente avec le résultat du 3) ?

b) Peut-on effectuer directement le test statistique à partir des calculs tels qu'ils sont présentés dans la feuille Excel ci-dessus ? Si non, quelle(s) modification(s) faut-il faire ?

c) Effectuer le test de khi-deux, au risque 5%, pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que Y suit une loi de Poisson ?

d) En déduire la probabilité que dans un lot de 100 appareils choisi au hasard, il y ait au maximum un appareil tombant en panne.

Exercice 8 *Marche aléatoire sur un graphe à trois sommet*

Une puce se déplace indéfiniment entre trois points A, B et C. Au départ (étape 0), elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points.

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant cette suite infinie de déplacements.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement A_n (respectivement B_n et C_n) : "la puce est en A (respectivement B et C)" à l'issue de la n-ème étape, et la probabilité α_n (respectivement β_n et γ_n) de l'événement A_n (respectivement B_n et C_n). On pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 0$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements ; en déduire que $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$.

b) Donner, pour tout entier naturel n, les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.

2) a) Calculer $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ et $\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$.

b) Exprimer $\alpha_{n+1},\ \beta_{n+1}$ et γ_{n+1} en fonction $\alpha_n,\ \beta_n$ et γ_n, pour tout entier naturel n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta_n = \gamma_n$ et $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - \alpha_n)$.

d) En déduire l'expression de α_n, puis de β_n et γ_n, en fonction de n.

e) En déduire la limite de α_n, β_n et γ_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ces résultats.