Université de Picardie Jules Verne **2011-2012**
UFR des Sciences - LAMFA

PAF - Formation Enseignement des Mathématiques - 20 janvier 2012

Mathématiques : statistiques et simulation

Dans ce document (d'après sujet HEC 2004, math 2, option économique), je vous propose d'étudier une situation de jeu traitant des thèmes *probabilité conditionnelle et indépendance*, avec mise en oeuvre d'un algorithme de simulation du jeu.

Description du jeu. On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de "pile" et de "face" sont équiprobables.

On admet que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à décrire.

Pour tout entier naturel n non nul, le n-ième lancer est appelé *lancer de rang n* et on désigne par F_n l'événement "face apparaît au lancer de rang n" et par $\overline{F_n}$ l'événement "pile apparaît au lancer de rang n"

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration "pile, pile, face" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "face, pile, pile" n'apparaisse ;

- le joueur J' est gagnant si la configuration "face, pile, pile" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "pile, pile, face" n'apparaisse ;

- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant ;

- si aucune des deux configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" n'apparaît, il n'y a pas de gagnant, et les deux joueurs sont perdants.

Simulation. On se propose de mettre en oeuvre un programme permettant, à l'aide d'une calculatrice, de simuler le jeu de "pile ou face" étudié. On considère l'algorithme suivant, dans lequel $random(0;1)$ donne aléatoirement la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.

Algorithme Quigagne

```
début
x = 0 ; y = 0 ; k = 0 ;
tant que x < 3 et y < 3, faire
      début
      k = k + 1 ; r = random(0; 1) ;
      si r = 1, alors début
                    si x ≥ 1, alors x = 2, sinon x = 1 ;
                    si y ≥ 1, alors y = y + 1 ;
                    fin
               sinon début
                    si x = 2, alors x = 3, sinon x = 0 ;
                    y = 1 ;
                    fin
      fin
si x = 3, alors écrire ('...'), sinon écrire ('...') ;
fin ;
```

1) Donner sous forme d'un tableau les valeurs prises successivement par les variables x, y et k lors de l'exécution de cet algorithme si les valeurs données à la variable r par $random(0, 1)$ sont successivement :

a) 1,1,1,1,0 ; b) 1,0,1,0,0,0,1,1 ; c) 0,1,0,1,0,1,1.

2) Que représente la dernière valeur prise par la variable k dans l'algorithme ci-dessus, et quel texte pourrait-on substituer aux pointillés dans la dernière instruction ? Qu'afficherait alors la calculatrice dans les trois exemples de la question 1) ?

3) Ecrire un programme, correspondant à l'algorithme ci-dessus, utilisable sur votre calculatrice.

Une ébauche d'étude probabiliste du jeu

4) Y a-t-il toujours un gagnant ?

a) La condition de sortie du "tant que" est-elle toujours vérifiée à un moment donné ?

b) Effectuer la simulation de 100 parties de ce jeu et indiquer la fréquence de parties gagnées par J, de parties gagnées par J', de parties sans gagnant.

c) On peut démontrer que lors d'une partie, la probabilité qu'il y ait un gagnant est égale à 1. Ce résultat est admis au niveau du lycée mais peut être démontré (voir complément 1 ci-après).

5) Le jeu est-il équitable ?

a) Représenter sur un arbre pondéré les résultats possibles des 4 premiers lancers.

b) Quelle hypothèse de l'énoncé assure l'indépendance des résultats des lancers ?

c) En est-il de même si on arrête les lancers dès qu'il y a un gagnant ? Comment interpréter alors les probabilités figurant sur l'arbre pondéré précédent ?

d) Considérant uniquement les 4 premiers lancers, les 2 joueurs ont-ils autant de chance de gagner ?

6) Probabilité de gain de chacun des 2 joueurs.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par G_n l'événement "le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n".

a) Calculer $P(G_3)$ et $P(G_4)$.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Quelle doit être la suite des résultats de n premiers lancers pour que le joueur J soit déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n ? En déduire que $P(G_n) = \frac{1}{2^n}$.

c) En déduire la probabilité p_n que J soit gagnant au plus tard à l'issue du lancer de rang n. On vérifiera que $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$.

d) Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

e) On admet que la probabilité de gain de J est égale à $\frac{1}{4}$. Quelle est la probabilité de gain de J' ? Conclure.

Complément 1 (hors programme). *On se propose de montrer que dans ce jeu, il y a toujours un gagnant.*

7) Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par D_n l'événement "lors des n premiers lancers, n'apparaissent jamais deux piles consécutifs", par d_n la probabilité de D_n.

a) Justifier les égalités $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$.

b) En considérant les résultats des lancers de rang 1, 2 et 3, calculer d_3.

c) A l'aide de la formule des probabilités complètes et des événements F_{n+2} et $F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}$, établir l'égalité :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

d) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β (que l'on ne déterminera pas) telles que

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } d_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

e) En déduire que la série de terme général d_n converge.

f) Pour tout entier naturel N non nul, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} d_n$. Etablir l'égalité :

$$\text{pour tout entier naturel } N \text{ non nul, } S_{N+2} = \frac{1}{2}S_{N+1} + \frac{1}{4}S_N + \frac{5}{4}.$$

g) En déduire l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

8) On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

Pour tout entier naturel n non nul, l'événement $[T = 0] \cup [T > n]$ est donc réalisé si et seulement si aucune des deux configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" n'est apparue au cours des n premiers lancers.

a) Calculer la probabilité des événements $[T = 1]$, $[T = 2]$ et $[T = 3]$.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Justifier l'égalité :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2, } P([T = 0] \cup [T > n]) = \frac{1}{2^n} + d_n.$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Donner une relation entre les événements $[T = n]$, $[T > n-1]$ et $[T > n]$. En déduire l'égalité :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 3, } P([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n.$$

d) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} P([T = n])$, et montrer que la probabilité que le jeu se termine par la victoire de l'un des joueurs est égale à 1.

Complément 2 (hors programme). *On se propose d'établir le paradoxe de Walter Penney : les temps d'attente des configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" (c'est-à-dire les temps d'attente des gains de J et J′) suivent la même loi alors que le jeu est inéquitable.*

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un "face" précédé de deux "piles" si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît pas.

Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un "pile" précédé d'un "pile" lui-même précédé d'un "face" si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît pas.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers donnent (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9 *et la variable Y' prend la valeur* 8.

On pose $c_1 = c'_1 = c_2 = c'_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $c_n = P([Y = n])$ et $c'_n = P([Y' = n])$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par B_n l'événement $\overline{F_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n$ et par B'_n l'événement $F_{n-2} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n}$.

9) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, les probabilités des événements B_n et B'_n sont égales à $\frac{1}{8}$.

10) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Comparer les événements $[Y \leq n]$ et $B_3 \cup B_4 \cup \cdots \cup B_n$. Comparer de même les événements $[Y' \leq n]$ et $B'_3 \cup B'_4 \cup \cdots \cup B'_n$.

11) On pose $u_1 = u'_1 = u_2 = u'_2 = 0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_n = P(B_3 \cup B_4 \cup \cdots \cup B_n)$ et $u'_n = P(B'_3 \cup B'_4 \cup \cdots \cup B'_n)$.

a) Vérifier que les événements B_3, B_4 et B_5 sont deux à deux disjoints, et que les événements B'_3, B'_4 et B'_5 sont deux à deux disjoints.

b) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5.

12) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

a) Que peut-on dire des événements B_{n-1}, B_n et B_{n+1} d'une part, et des événements B'_{n-1}, B'_n et B'_{n+1} d'autre part ?

b) Montrer que l'événement $[Y \leq n+1]$ est la reunion disjointe des deux événements $[Y \leq n]$ et $[Y > n] \cap B_{n+1}$.

c) En déduire l'égalité : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

On démontrerait de même (ne pas le faire) l'égalité : $u'_{n+1} = u'_n + \frac{1}{8}(1 - u'_{n-2})$.

13) a) Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n non nul, les nombres u_n et u'_n sont égaux.

b) Montrer que les variables aléatoires Y et Y' suivent la même loi de probabilité.