Les 2 difficultés à résoudre sont la limitation arbitraires des nombres à 11...1 et le risque de recompter plusieurs fois les différentes solution.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 1$
On note

$$a_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ ne contient pas la séquence "111"}, p \text{ commence par } x \neq 1,\ p \leq M_n\}$$

$$b_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ ne contient pas la séquence "111"}, p \text{ commence par } 1x, x \neq 1,\ p \leq M_n\}$$

$$c_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ ne contient pas la séquence "111"}, p \text{ commence par } 11x, x \neq 1,\ p \leq M_n\}$$

$$d_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ ne contient pas la séquence "111"}, p \text{ commence par } x \neq 1,\ M_n < p \leq 10^n\}$$

$$e_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ ne contient pas la séquence "111"}, p \text{ commence par } 1x, x \neq 1,\ M_n < p \leq 10^n\}$$

$$f_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ ne contient pas la séquence "111"}, p \text{ commence par } 11x, x \neq 1,\ M_n < p \leq 10^n\}$$

$$g_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ contient la séquence "111"},\ p \leq M_n\}$$

$$h_n = card\{p \in \mathbb{N}, p \text{ contient la séquence "111"},\ M_n < p \leq 10^n\}$$

La valeur cherchée dans le problème est donc ici g_{11}
On a facilement:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n \\
b_{n+1} &= a_n \\
c_{n+1} &= c_n \\
d_{n+1} &= 8(a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n) \\
e_{n+1} &= d_n \\
f_{n+1} &= e_n \\
g_{n+1} &= c_n + 2g_n + h_n \\
h_{n+1} &= f_n + 8g_n + 9h_n
\end{aligned}$$

En notant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix}$, et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ on a $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$X_n = A^{n-1} X_1$$

Avec un logiciel de calcul formel quelconque, par exemple maple on obtient la valeur de $g_{11} = 90971121$

On peut aller un peu plus loin et calculer la limite des fréquences:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{10^n}$$

La valeur propre de A de plus grand module est en effet 10. C'est une valeur propre simple. $\frac{A^n}{10^n}$ converge vers la matrice P du projecteur sur l'espace propre de A associée à 10 parallèlement à la somme des autres espaces propres.

$$P = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\frac{X_n}{10^n} \underset{n\infty}{\rightarrow} \frac{1}{10} P X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}$$

La probabilité qu'un nombre de n chiffres ne contienne pas la séquence "111" tend vers 0
La convergence est très lente et la valeur de $\frac{X_{11}}{10^{11}}$ est très loin de cette limite à cause d'une valeur propre de A de module $\simeq 9.991$ très proche de 10