Groupe Math et Tice
math.tice@ac-amiens.fr

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens
Janvier 2017
Auteurs : francois.delannoy1@ac-amiens.fr

Le problème du mois d'avril 2017

(issu de la lettre TICE d'avril 2017)

➔ Certains nombres entiers peuvent s'écrire comme la somme de nombres impairs consécutifs. Par exemple, $64 = 13 + 15 + 17 + 19$. Est-il possible d'écrire 2017 comme la somme d'au moins deux nombres impairs positifs consécutifs ? Qu'en est-il de 2015 ?

Voici un problème dont la résolution reste abordable mais qui demeure tout de même intéressant au vu des nombreuses méthodes de résolution qu'il a suscitées.
Au fil de cet article, nous nous intéresserons dans un premier temps à deux démonstrations utilisant des résultats sur la somme des impairs successifs pour l'une, sur les suites arithmétiques pour l'autre.
Puis, nous présenterons quelques résolutions effectuées par le biais de l'algorithmique (programmes en Python et en Scratch) avant d'aborder une résolution élégante du problème.
Ce sera enfin l'occasion de présenter des prolongements à ce problème afin de proposer des situations semblables au sein de nos classes.

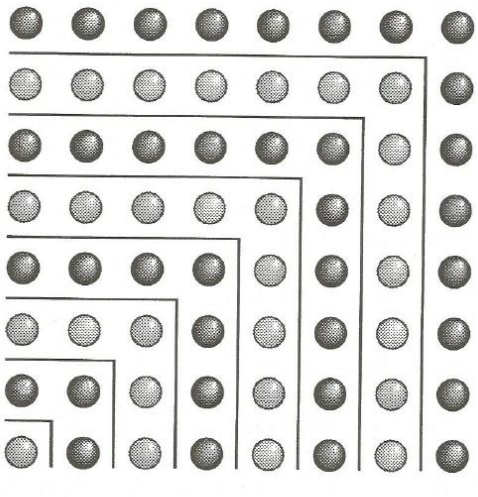
I) Une première approche

A) Somme des impairs

Propriété : La somme des n premiers entiers strictement positifs vaut n^2. Autrement dit :

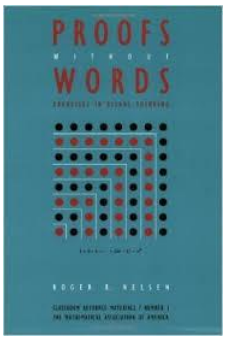
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

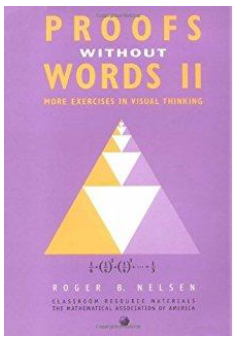
Voici une démonstration visuelle fort élégante de ce résultat remarquable que l'on doit à Nicomaque de Gérase (I[er] siècle).



$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

Vous pourrez retrouver cette preuve ainsi que de nombreuses démonstrations visuelles dans les ouvrages de Roger Nelson, *Proof without words* I et II.





Solution du problème :

Un nombre N s'écrit comme somme d'au moins deux nombres impairs positifs consécutifs s'il existe deux nombres strictement positifs a et b tels que :

$$N = \sum_{k=a}^{b}(2k-1)$$

Or $\sum_{k=a}^{b}(2k-1) = \sum_{k=0}^{b}(2k-1) - \sum_{k=0}^{a-1}(2k-1) = b^2 - (a-1)^2 = (b-a+1)(b+a-1)$
Donc $N = (b-a+1)(b+a-1)$ où $(b-a+1) < (b+a-1)$
Il suffit donc de décomposer N en un produit de deux nombres entiers positifs.

Cas $N = 2017$:

Le nombre 2017 étant premier, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} b - a + 1 = 1 \\ b + a - 1 = 2017 \end{cases}$$

dont la solution $(a; b) = (1009; 1009)$ ne constitue pas une solution du problème.

Cas $N = 2015$:

Comme $2015 = 5 \times 31 \times 13$, il suffit de résoudre les 4 systèmes suivants :

$$(i)\begin{cases} b - a + 1 = 1 \\ b + a - 1 = 2015 \end{cases} \qquad (iii)\begin{cases} b - a + 1 = 13 \\ b + a - 1 = 155 \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} b - a + 1 = 5 \\ b + a - 1 = 403 \end{cases} \qquad (iv)\begin{cases} b - a + 1 = 31 \\ b + a - 1 = 65 \end{cases}$$

qui aboutissent à 3 solutions du problème initial :

$$2015 = \sum_{k=72}^{84} (2k - 1) \qquad 2015 = \sum_{k=18}^{48} (2k - 1) \qquad 2015 = \sum_{k=200}^{204} (2k - 1)$$

B) Suites arithmétiques

Voici une solution qui ressemble à la précédente, mais qui utilise des résultats sur les suites arithmétiques.

Solution du problème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme entier impair u_0 et de raison $r = 2$.

Alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n + 1) \times \frac{2u_0 + nr}{2} = (n + 1) \times (u_0 + n)$

Pour le cas 2015, on recherche les valeurs de n et u_0 telles que $(n + 1) \times (u_0 + n) = 2015$.

On aboutit alors aux quatre systèmes d'équations suivants :

$$(i)\begin{cases} n + 1 = 1 \\ u_0 + n = 2015 \end{cases} \qquad (iii)\begin{cases} n + 1 = 13 \\ u_0 + n = 155 \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} n + 1 = 5 \\ u_0 + n = 403 \end{cases} \qquad (iv)\begin{cases} n + 1 = 31 \\ u_0 + n = 65 \end{cases}$$

puis aux trois solutions suivantes :

$$2015 = \sum_{k=72}^{84} (2k - 1) \qquad 2015 = \sum_{k=18}^{48} (2k - 1) \qquad 2015 = \sum_{k=200}^{204} (2k - 1)$$

Bilan : Ces deux résolutions abordent des notions variées : la formule de la somme des impairs consécutifs, les sommes partielles, les identités remarquables, les systèmes d'équations, les suites arithmétiques. Cependant, elles paraissent bien fastidieuses. Tâchons de voir si d'autres méthodes mèneraient au résultat de manière plus efficace.

II) Des recherches par ordinateur

Solution du problème avec Python (proposée par Jean-Philippe Blaise) :

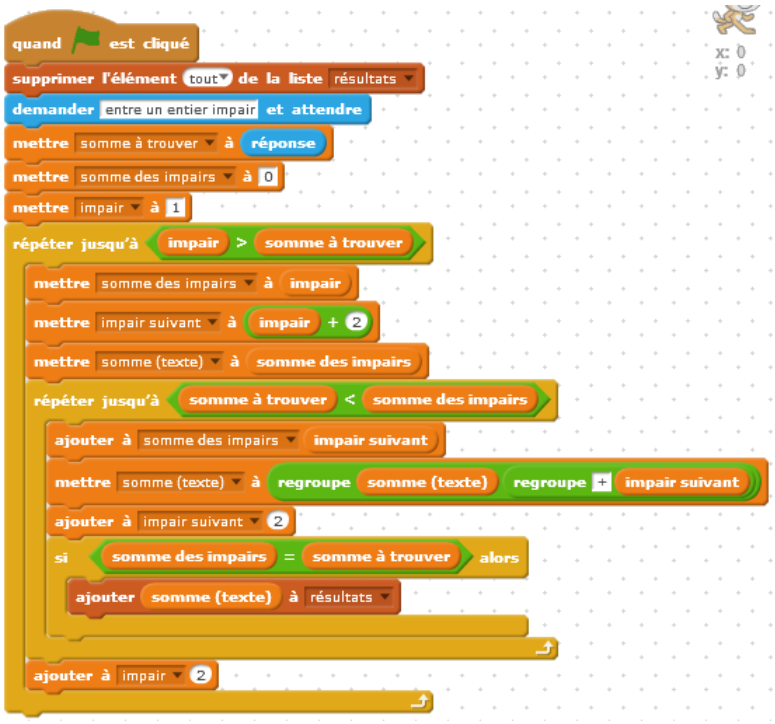
Voici un programme rédigé en Python, permettant la recherche automatique des solutions au problème (pour $N = 2015$).

```
# D'après le problème du mois de la lettre
# Math et Tice de l'académie d'Amiens
# http://maths.ac-amiens.fr/sites/maths.ac-amiens.fr/IMG/pdf/la_lettre_tice_d_avril.pdf

total=2015

for i in range(1,total,2):

  s=i
  nb=i+2
  txt=""+str(i)
  while s<total:
    s=s+nb
    txt=txt+"+"+str(nb)
    nb=nb+2
    if s==total:
      print (total,"=",txt)
```

```
>>>
2015 = 35+37+39+41+43+45+47+49+51+53+55+57+59+61+63+65+67+69+71+73+75+77+79+81+83+85+87+89+91+93+95
2015 = 143+145+147+149+151+153+155+157+159+161+163+165+167
2015 = 399+401+403+405+407
```

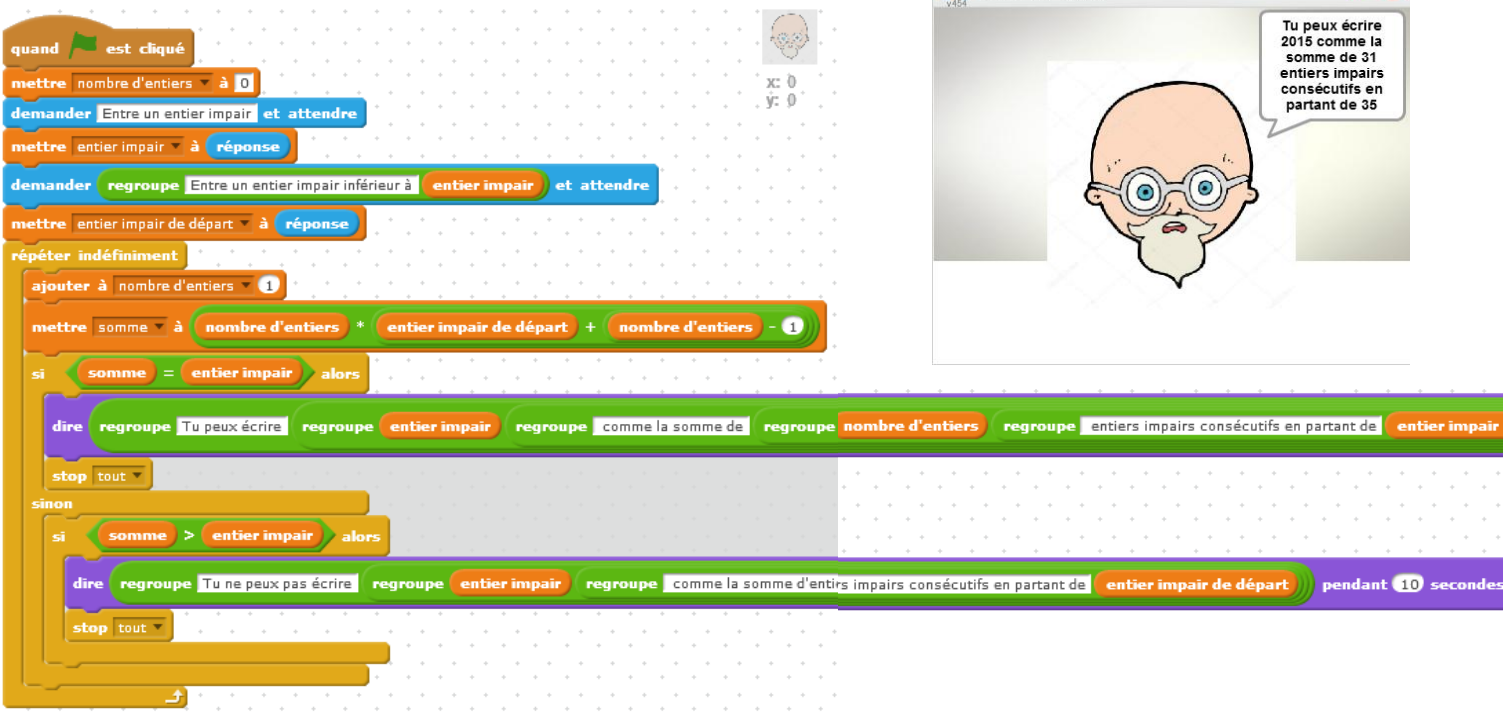
Solution du problème avec Scratch (solution n°1) :

Ce programme permet de déterminer toutes les solutions du problème.



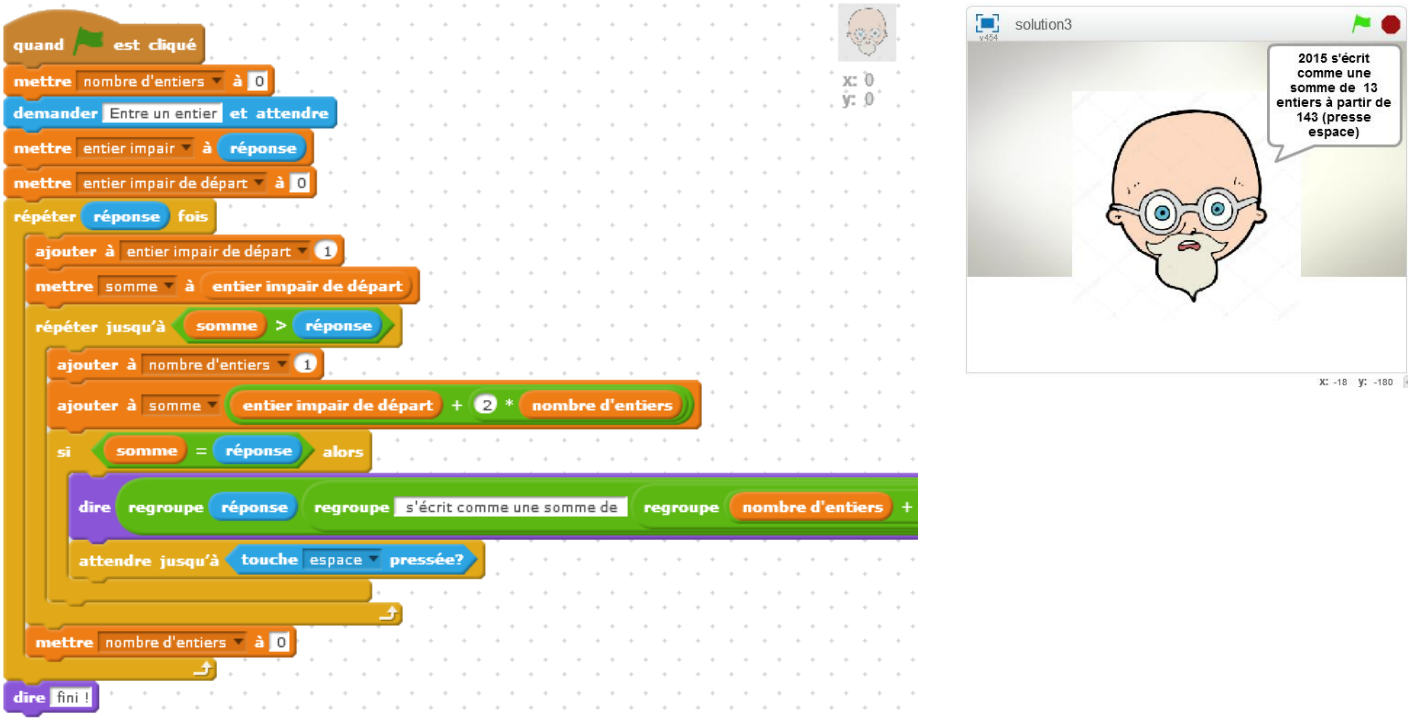
Solution du problème avec Scratch (solution n°2 proposé par Davy Caudron) :

Ce programme permet de tester une solution du problème.



Solution du problème avec Scratch (solution n°3) :

Ce programme, inspiré du précédent, permet de déterminer toutes les solutions du problème.



III) Une démonstration élégante

Solution du problème (proposée par Pascal Urro) :

Soit N un nombre impair. Si N s'écrit comme une somme de nombres impairs alors cette somme est celle d'un nombre impair de termes.
Cela permet de définir un nombre « central » que nous noterons x.
Nous obtenons alors une expression symétrique du type $(x-2)+x+(x+2)$ pour 3 nombres impairs, $(x-4)+(x-2)+x+(x+2)+(x+4)$ pour 5 nombres impairs, etc.
Ce type d'expression possède une somme du type nx avec n impair.

Or, 2017 est premier, il n'est donc pas possible de le décomposer en une somme de nombres impairs qui se suivent.
Cependant, $2015 = 5 \times 13 \times 31$, on peut alors trouver trois solutions pour 2015 :

- l'une possédant 5 termes et dont le terme central est $13 \times 31 = 403$;
- l'autre possédant 13 termes et dont le terme central est $5 \times 31 = 155$;
- la dernière possédant 31 termes et dont le terme central est $5 \times 13 = 65$.

IV) Quelques propriétés intéressantes

Intéressons-nous désormais aux quelques prolongements qu'a pu susciter ce problème du mois.

Propriété 1 (suggérée par Agnès Baraquin) : Si un nombre pair s'écrit comme une somme d'impairs successifs alors il est multiple de 4.

Démonstration :
Dans un premier temps, observons le résultat suivant :
La somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
En effet, si $k \in \mathbb{N}$ alors $(2k+1)+(2k+3) = 4(k+1)$

Soit N un nombre pair. Si N s 'écrit comme une somme d'impairs consécutifs alors cette somme est celle d'un nombre pair de termes.
D'après le résultat précédent, en regroupant les termes deux à deux, on déduit que cette somme peut s'écrire comme une somme de multiples de 4.

Propriété 2 : Si l'on s'autorise les nombres relatifs, alors tout nombre impair peut s'écrire comme une somme d'au moins deux impairs successifs.

Exemple : $2017 = (-2015)+(-2013)+\cdots+2015+2017.$

V) Un problème connexe à proposer en classe

Nous avons vu précédemment que le choix de l'inconnue peut avoir son importance dans la résolution d'un problème. Voici un problème que l'on pourra mener en classe avec nos élèves de collège et de lycée.

Enoncé du problème (proposé par Guillaume Miannay) :

Trouver trois nombres consécutifs dont la somme est égale à leur produit.

A) Des simulations

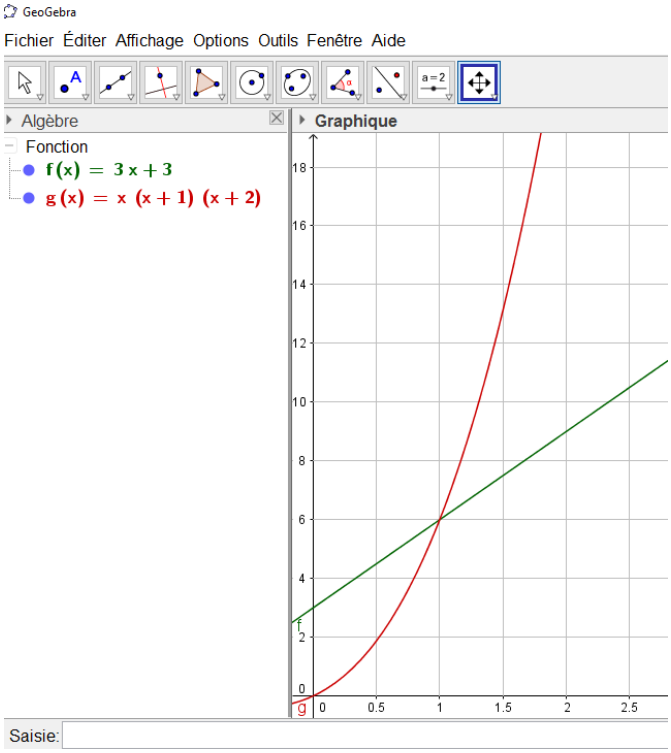
Sans nom 1 - OpenOffice Calc

Fichier Édition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre Aide

Arial 10

F7

	A	B	C	D	E
1	0	1	2	3	0
2	1	2	3	6	6
3	2	3	4	9	24
4	3	4	5	12	60
5	4	5	6	15	120
6	5	6	7	18	210
7	6	7	8	21	336



B) Une résolution

Soient trois nombres entiers consécutifs, $(n-1)$, n et $(n+1)$.

On cherche à résoudre l'équation : $(n-1) \times n \times (n+1) = 3n$
équivalente à : $n(n+2)(n-2) = 0$.
dont les solutions sont $n = -2$, $n = 0$ et $n = 2$.

Remarque : Cette résolution utilise principalement des notions de collège : calcul littéral, factorisation, résolution d'équation, identités remarquables.