**Groupe Math et Tice**

math.tice@ac-amiens.fr

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

**Académie d'Amiens**

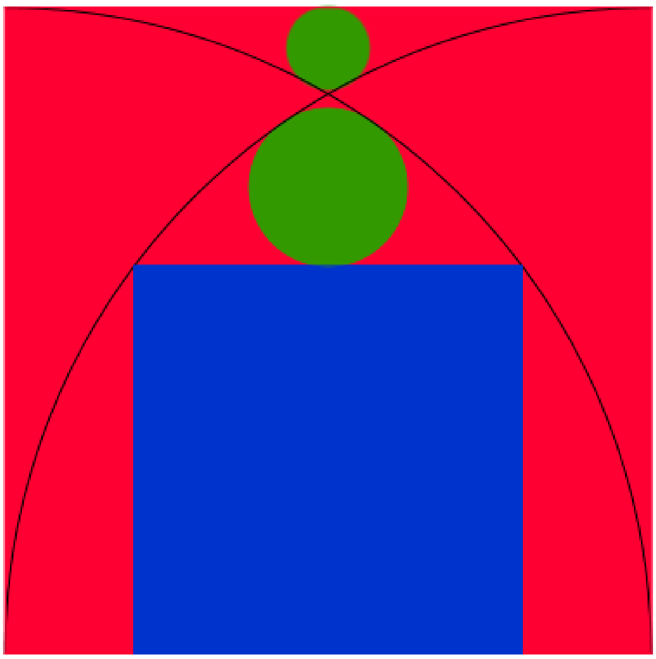
**Janvier 2017**

**Auteurs :** francois.delannoy1@ac-amiens.fr

# Le problème des mois de février-mars 2017

**(issu de la lettre TICE de février-mars 2017)**

On considère la figure suivante, constituée de carrés, de disques et d'arcs de cercle. Le grand carré a pour côté 1. Les disques sont tangents aux arcs de cercle ainsi qu'au côté d'un des carrés.

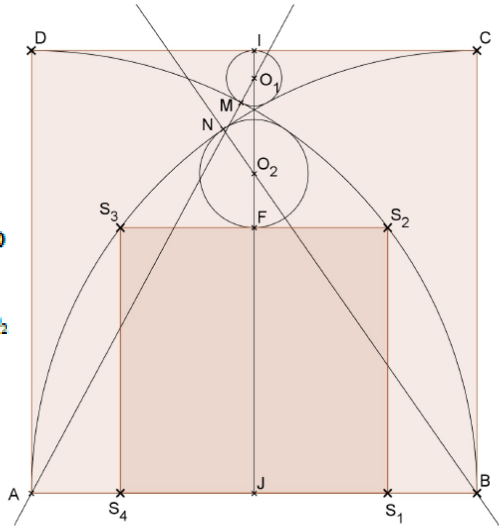


→Déterminer le rayon de chaque disque, ainsi que le côté du plus petit carré.

Vous trouverez dans la suite de cet article, trois méthodes de résolution de ce problème. Chacune d'elles fait appel à des notions et à un niveau d'expertise différents (Terminale, seconde puis collège).

Je vous laisse maintenant découvrir (ou redécouvrir) ces démonstrations élégantes.
Tout commence par un schéma…

**<u>Une première résolution analytique :</u> (proposée par Thierry Fournier)**




(1) Par homothétie de centre A et de rapport $a$, on peut se ramener à la situation d'un carré ABCD de côté quelconque $a$. Dans la suite, je me contente donc du cas d'un carré de côté AB = 1 unité.

(2) Le problème est symétrique par rapport à la médiane (IJ) du carré ABCD. Les centres $O_1$ et $O_2$ des deux cercles sont donc sur cette médiane.

*<u>Côté du petit carré</u>*

En considérant l'angle $x = (\vec{AB}, \vec{AS_2})$, on a $AS_1 = AS_4 = \cos x$ et donc $S_4S_1 = 2\cos x - 1$ d'une part et $S_1S_2 = \sin x$.

$x$ est donc solution de l'équation $2\cos x - 1 = \sin x$ avec $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

L'équation peut par exemple être résolue en se ramener à une équation du second degré complexe en posant $X = e^{ix}$ : $(2i-1)X^2 - 2iX + 1 + 2i = 0$ .

On obtient alors comme solutions $X = -i$ et $X = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ . La première solution est à écarter ($x$ pas dans l'intervalle souhaité) et il reste donc $\cos x = \frac{4}{5}$ et $\sin x = \frac{3}{5}$

Le côté du petit carré est donc $\boxed{S_1S_2 = \sin x = \frac{3}{5}}$ .

*<u>Rayon $O_1I$ du petit cercle</u>*

Notons $r_1$ le rayon du petit cercle.

Le cercle est tangent au quart de cercle de centre A passant par les sommets B et D du grand carré. Par conséquent, en nommant M le point d'intersection de ($AO_1$) et de ce quart de cercle, M est le point de tangence entre le petit cercle et le quart de cercle : $AO_1 = 1 + r_1$

En travaillant dans le repère $(I, \vec{AB}, \vec{AD})$ , nous avons les coordonnées suivantes pour les points A et $O_1$ : A (-0,5 ; -1) et $O_1$ (0 ; $-r_1$).

Par suite $AO_1^2 = (1+r_1)^2 = 0{,}25 + (1-r_1)^2$ ce qui nous donne : $\boxed{r_1 = \frac{1}{16}}$ .

*<u>Rayon $O_2N$ du « grand cercle »</u>*

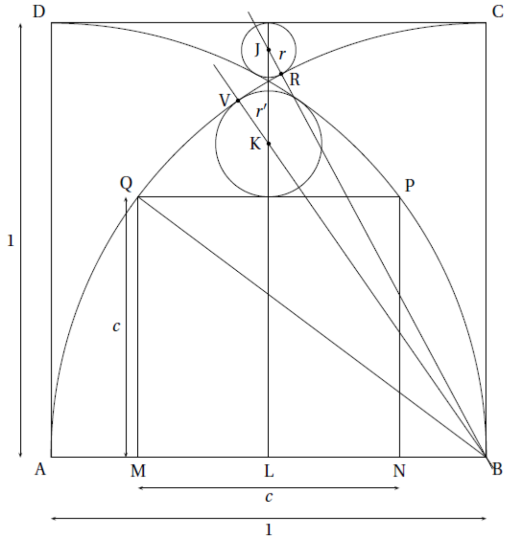
Notons $r_2$ le rayon du grand cercle.

B, $O_2$ et N sont alignés ; N est le point de tangence entre le grand cercle et le quart de cercle de centre B passant par A et C : $BO_2 = 1 - r_2$

En travaillant dans le repère $(F, \vec{AB}, \vec{AD})$ , nous avons les coordonnées suivantes pour les points B et O2 : B (0,5 ; -0,6) et $O_2$ (0 ; $r_2$).

Par suite $BO_2^2 = (1-r_2)^2 = 0{,}25 + (0{,}6+r_2)^2$ ce qui nous donne : $\boxed{r_2 = \frac{39}{160}}$ .

**<u>Une deuxième résolution utilisant le théorème de Pythagore :</u> (proposée par Fabrice Bavoil puis Aurélien Dessenne)**




**PRÉLIMINAIRES**

On suppose connu le résultat suivant :

> **Si** *deux cercles sont tangents (c.-à-d. ont un seul point en commun)* **alors** *leur point commun est aligné avec les centres des cercles.*

Cela permet de déterminer les longueurs suivantes :

$JB = 1 + r$, $JL = 1 - r$, $KB = 1 - r'$ et $KL = c + r'$.

De plus, par un calcul évident et un argument de symétrie, $MB = \dfrac{1+c}{2}$.

## Calcul de $c$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle QMB rectangle en M, dans lequel BQ = 1 :

$$c^2 + \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 = 1$$

D'où $5c^2 + 2c + 1 = 4$ ; on en déduit $\boxed{c = \frac{3}{5}}$, l'autre solution $(-1)$ étant négative.

## Calcul de $r$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle JLB rectangle en L :

$$(1-r)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1+r)^2$$

D'où $-2r + \frac{1}{4} = 2r$ ; on en déduit $\boxed{r = \frac{1}{16}}$.

## Calcul de $r'$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle KLB rectangle en L :

$$\left(\frac{3}{5} + r'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1-r')^2$$

D'où $\frac{9}{25} + \frac{6}{5}r' + \frac{1}{4} = 1 - 2r'$ ; on en déduit $\boxed{r' = \frac{39}{320}}$.

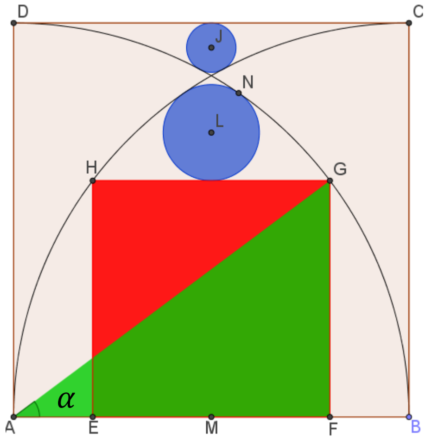
<u>**Remarque :**</u> Cette solution, bien qu'utilisant le théorème de Pythagore, nécessite la résolution d'une équation du second degré par le calcul d'un discriminant.

Certains se sont posé la question de savoir s'il était possible de n'utiliser que des notions de collège.

Voici une troisième résolution qui utilise la trigonométrie de collège et aboutit à une équation résoluble par un élève de collège (il y a encore peu).

Le niveau d'expertise reste toutefois élevé pour un élève de collège.

**<u>Une troisième résolution utilisant la trigonométrie :</u> (proposée par François Delannoy)**




**<u>Calcul de c :</u>**

Le triangle AFG est rectangle en F.
$AF = \cos(\alpha)$

D'une part : $c = 1 - 2(1 - \cos(\alpha))$
D'autre part : $c = \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$
On en déduit donc : $1 - \cos^2(\alpha) = [1 - 2(1 - \cos(\alpha))]^2$

Soit $X = \cos(\alpha)$
Alors $1 - X^2 = [1 - 2(1 - X)]^2$
S'ensuit : $5X^2 - 4X = 0$

D'où $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$

Conclusion : $c = \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$