Groupe Math et Tice

math.tice@ac-amiens.fr

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens

Mai 2017

Auteur : francois.delannoy1@ac-amiens.fr

Le problème du mois de mai 2017

(issu de la lettre TICE de mai 2017)

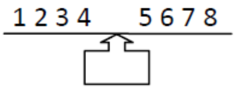
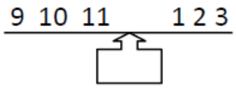
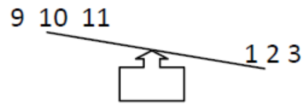
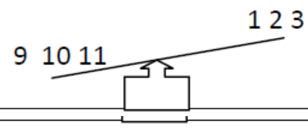
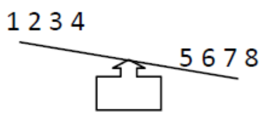
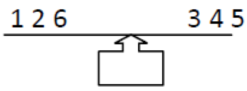
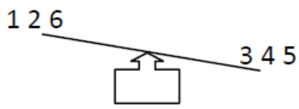
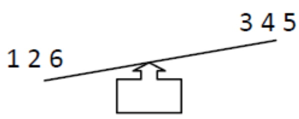
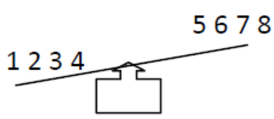
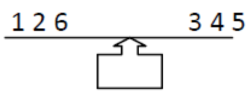
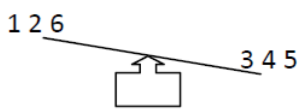
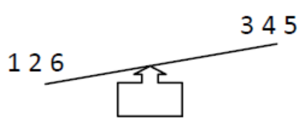
Faire pencher la balance.

➔ Nous disposons de douze pièces de monnaie ; toutes ont un poids identique sauf une, qui peut être plus lourde ou plus légère que les autres.
Comment identifier la pièce défectueuse en effectuant au maximum trois pesées à l'aide d'une balance à plateaux ? Peut-on déterminer si la pièce défectueuse est plus lourde ou plus légère ?

Vous trouverez dans la première partie de cet article quelques méthodes de résolution de ce problème.
Puis nous aborderons différentes adaptations de ce problème au sein de nos classes : au niveau collège et au lycée, utilisant des modélisation en Python, l'outil Scratch ou même une vidéo.

Bonne lecture.

<u>Une première solution :</u> (proposée par Aurélien Dessenne et Olivier Khammouni)

Pesée 1	*Pesée 2*	*Pesée 3*
1.  L'intruse appartient au lot 9 10 11 12	**1.1**  **1.2**  **1.3** 	12 est défectueuse. On la compare avec n'importe laquelle pour savoir si elle est plus lourde ou plus légère. 9, 10 ou 11 est défectueuse (plus légère). On compare 9 et 10, en cas d'égalité c'est 11 et sinon, la plus légère est l'intruse cherchée. 9, 10 ou 11 est défectueuse (plus lourde). On compare 9 et 10, en cas d'égalité c'est 11 et sinon, la plus lourde est l'intruse cherchée.
2.  L'intruse appartient soit au lot 1 2 3 4 (dans ce cas elle est plus légère) soit au lot 5 6 7 8 (dans ce cas elle est plus lourde)	**2.1**  **2.2**  **2.3** 	L'intruse est 7 ou 8. On les compare et la plus lourde est l'intruse. L'intruse ne peut pas être 6 ni 3 ni 4 (positions contradictoires). L'intruse est donc 1 ou 2 ou 5. On compare 1 et 2, en cas d'égalité c'est 5 et elle est plus lourde et sinon l'intruse est la plus légère. L'intruse ne peut pas être 5 ni 1 ni 2 (positions contradictoires). L'intruse est donc 3 ou 4 ou 6. On compare 3 et 4, en cas d'égalité c'est 6 et elle est plus lourde et sinon l'intruse est la plus légère.
3.  L'intruse appartient soit au lot 1 2 3 4 (dans ce cas elle est plus lourde) soit au lot 5 6 7 8 (dans ce cas elle est plus légère)	**2.1**  **2.2**  **2.3** 	L'intruse est 7 ou 8. On les compare et la plus légère est l'intruse. L'intruse ne peut pas être 5 ni 1 ni 2 (positions contradictoires). L'intruse est donc 3 ou 4 ou 6. On compare 3 et 4, en cas d'égalité c'est 6 et elle est plus légère et sinon l'intruse est la plus lourde. L'intruse ne peut pas être 6 ni 3 ni 4 (positions contradictoires). L'intruse est donc 1 ou 2 ou 5. On compare 1 et 2, en cas d'égalité c'est 5 et elle est plus légère et sinon l'intruse est la plus lourde.

Une deuxième solution : **(proposée par David Rousseau, Thomas Langlet et Ian Stewart)**

Les problèmes de pesées comme celui-ci sont traitables en base 3 symétrique.

L'idée est d'effectuer trois pesées entre des groupes de quatre pièces.

On commence par identifier chaque pièce par un nombre en base 3 symétrique, ce nombre devant retracer son histoire lors des trois pesées.

Exemple : Une pièce identifiée par le nombre -101 traduira sa présence à la première pesée sur le plateau de gauche (-1), puis son absence au cours de la deuxième pesée (0) et enfin sa présence sur le plateau de droite à la troisième pesée (1).

Il faut bien sûr s'assurer qu'il n'y ait ni deux pièces identifiées par le même nombre, ni même par deux nombres « symétriques » (si l'une est identifiée par -110, aucune autre ne devra être identifiée par $1-10$).
Cela laisse ainsi 12 possibilités (en enlevant $-1-1-1$, 000, et 111).

Passons maintenant aux pesées.
Identifions les pesées par un système analogue : $G, 0, D$ (G signifiant que le plateau gauche est le plus lourd, 0 pour un équilibre , D signifiant que le plateau de droite est plus lourd)
Le résultat des trois pesées identifiera ainsi la pièce défectueuse.

Exemple : Si le résultat des trois pesées est $GD0$ alors la pièce défectueuse sera celle portant l'identifiant -110 (traduisant que la pièce est plus lourde) ou à défaut celle portant l'identifiant « symétrique » $1-10$ (traduisant ainsi que la pièce est plus légère).

En pratique :

Identifions dans un premier temps chaque pièce par un nombre en base 3 symétrique.

	Identification des pièces			Identification symétrique		
	Pesée 1	Pesée 2	Pesée 3			
Pièce 1	0	0	1	0	0	-1
Pièce 2	0	1	0	0	-1	0
Pièce 3	1	0	0	-1	0	0
Pièce 4	0	-1	-1	0	1	1
Pièce 5	-1	0	-1	1	0	1
Pièce 6	-1	-1	0	1	1	0
Pièce 7	0	1	-1	0	-1	1
Pièce 8	-1	0	1	1	0	-1
Pièce 9	1	-1	0	-1	1	0
Pièce 10	-1	1	1	1	-1	-1
Pièce 11	1	-1	1	-1	1	-1
Pièce 12	1	1	-1	-1	-1	1

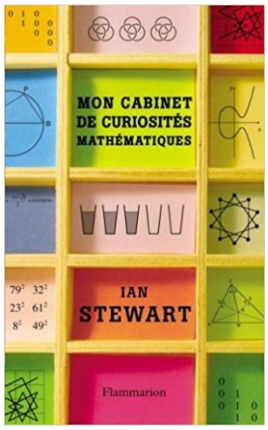
Cette identification amène à la description des 3 pesées suivantes :

	Plateau gauche	Plateau droit
1ère pesée	Pièce 5 ; Pièce 6 ; Pièce 8 ; Pièce 10	Pièce 3 ; Pièce 9 ; Pièce 11 ; Pièce 12
2ème pesée	Pièce 4 ; Pièce 6 ; Pièce 9 ; Pièce 11	Pièce 2 ; Pièce 7 ; Pièce 10 ; Pièce 12
3ème pesée	Pièce 4 ; Pièce 5 ; Pièce 7 ; Pièce 12	Pièce 1 ; Pièce 8 ; Pièce 10 ; Pièce 11

Le résultat de ces trois pesées pouvant ainsi être interprété grâce à la table de décision suivante :

Pesée 1	Pesée 2	Pesée 3	Solution
0	0	D	La pièce 1 est plus lourde
0	0	G	La pièce 1 est plus légère
0	D	0	La pièce 2 est plus lourde
0	G	0	La pièce 2 est plus légère
D	0	0	La pièce 3 est plus lourde
G	0	0	La pièce 3 est plus légère
0	G	G	La pièce 4 est plus lourde
0	D	D	La pièce 4 est plus légère
G	0	G	La pièce 5 est plus lourde
D	0	D	La pièce 5 est plus légère
G	G	0	La pièce 6 est plus lourde
D	D	0	La pièce 6 est plus légère
0	D	G	La pièce 7 est plus lourde
0	G	D	La pièce 7 est plus légère
G	0	D	La pièce 8 est plus lourde
D	0	G	La pièce 8 est plus légère
D	G	0	La pièce 9 est plus lourde
G	D	0	La pièce 9 est plus légère
G	D	D	La pièce 10 est plus lourde
D	G	G	La pièce 10 est plus légère
D	G	D	La pièce 11 est plus lourde
G	D	G	La pièce 11 est plus légère
D	D	G	La pièce 12 est plus lourde
G	G	D	La pièce 12 est plus légère

La solution de Ian Stewart :



On retrouve dans la littérature de vulgarisation mathématique une explication détaillée de cette méthode.
Voici un extrait de l'article ***comment repérer une fausse pièce*** du livre *Mon cabinet de curiosités mathématiques* de Ian Stewart.

[…] O'Beirne propose une solution fondée sur un « arbre de décision ». Il évoque également l'élégante résolution que « Blanche Descartes » a fait paraître dans *Eurêka*, le journal des Archimédéens – la société de mathématiques d'étudiants du premier cycle de l'université de Cambridge.
Derrière le nom de Mrs Descartes se cachait en fait un certain Cédric A.B. Smith, dont la solution est un bijou d'ingéniosité.
Elle se présente sous la forme d'un poème mettant en scène un professeur dénommé Félix Fiddlesticks, qui ressemble à ceci :

A la queue leu leu F pose ses pièces,
Sur chacune d'elles il écrit une lettre
Pour former les mots : F AM NOT LICKED.

(F AM NOT LICKED que l'on peut traduire par « J'ai trouvé ! »)

Vient ensuite une liste codée qui donne en trois vers de 8 lettres chacun, la solution des trois pesées – 4 pièces d'un côté, 4 de l'autre :

MA DO LIKE
ME TO FIND
FAKE COIN

(que l'on peut traduire par : « Maman veut que je trouve la fausse pièce »)

Pour achever de vous convaincre, voici la liste des résultats de pesées selon que chaque pièce est lourde ou légère. « G » signifie que le plateau de gauche descend, « D » que c'est le plateau de droite et « – » indique qu'ils sont en équilibre.

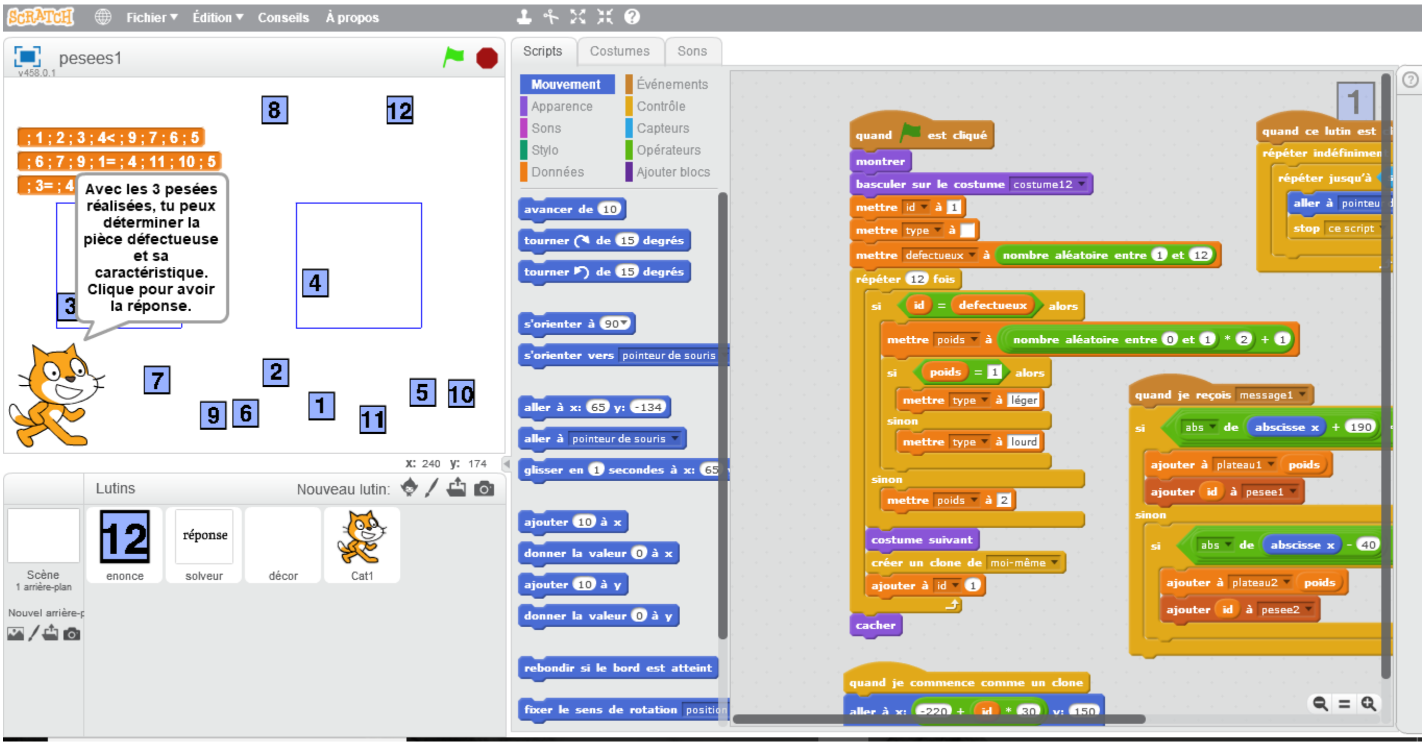
Pièce fausse	Pesée n°1	Pesée n°2	Pesée n°3
F lourde	–	D	G
F légère	–	G	D
A lourde	G	–	G
A légère	D	–	D
M lourde	G	G	–
M légère	D	D	–
N lourde	–	D	D
N légère	–	G	G
O lourde	G	G	D
O légère	D	D	G
T lourde	–	G	–
T légère	–	D	–
L lourde	D	–	–
L légère	G	–	–
I lourde	D	D	D
I légère	G	G	G
C lourde	–	–	D
C légère	–	–	G
K lourde	D	–	G
K légère	G	–	D
E lourde	D	G	G
E légère	G	D	D
D lourde	G	D	–
D légère	D	G	–

Un programme Scratch pour modéliser le problème :

Vous trouverez en pièce jointe de cet article une proposition de programme Scratch qui permet de réaliser les trois pesées et de dire s'il est possible de conclure sur la pièce défectueuse.

Une fois le fichier Scratch ouvert, il suffit de déplacer les poids dans les ensembles de part et d'autre de la balance puis de cliquer sur le bouton « peser », puis « d'effectuer une nouvelle pesée », trois fois de suite.

Après avoir appuyé sur le bouton « Résultat », le chat vous annonce alors si les trois pesées effectuées permettent ou non de déterminer la pièce défectueuse.



Dans nos classes :

Voici quelques idées d'activités qu'il est possible de mener en classe.
Ces activités peuvent être présentées aux élèves sous forme de défis.

Défi n°1 :

9 pièces indiscernables sont toutes de même poids sauf une qui est plus lourde que les autres.
On dispose d'une balance à plateaux.
Elaborer une méthode infaillible permettant de déterminer la pièce intruse en uniquement 2 pesées.

Pour aller plus loin :
9 pièces indiscernables sont toutes de même poids sauf une qui est soit plus lourde soit plus légère que les autres.
On dispose d'une balance à plateaux.
Elaborer une méthode infaillible permettant de déterminer la pièce intruse en uniquement 3 pesées.

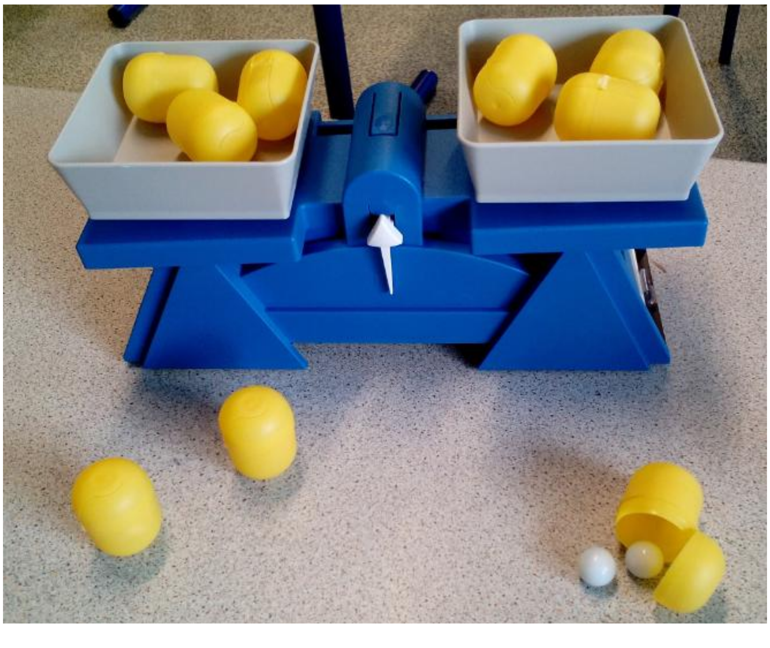
Pistes de réflexion :

Au collège et au lycée :
Ce problème est une adaptation du problème du mois.
Dès le début de collège, les élèves par petits groupes parviennent à élaborer des stratégies de résolution.
C'est l'occasion d'aborder avec eux une réflexion sur différentes questions :

- Est-il judicieux de comparer les masses de 4 objets sur le plateau de gauche avec 5 objets sur celui de droite ?
- Lors d'une pesée proposée, la présence de chaque objet présent sur la balance est-elle utile ?
- De savoir que l'objet intrus est plus lourd va-t-il nous être utile ? Comment ?

La deuxième partie du problème **pour aller plus loin** est plus technique et nécessite souvent un coup de pouce.
Une fois une solution présentée, les élèves peuvent être amenés à reformuler la solution ou à la présenter à leur tour à la classe, afin de permettre son appropriation.

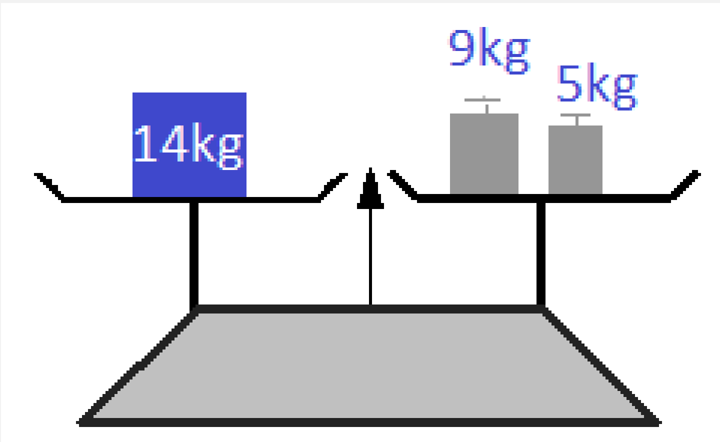
Manipuler :
Il pourra également être utile de mettre à disposition des élèves une balance de Roberval ainsi que des objets à peser permettant de modéliser le problème.



Défi n°2 :

On dispose d'une balance à plateaux et de 4 masses : de 2kg, de 5 kg, de 9 kg et de 17 kg.
Quelles masses pourra-t-on peser à l'aide de ce matériel ?

Exemple : On pourra peser un objet d'une masse de 14 kg grâce au dispositif suivant :



Pistes de réflexion :

Au collège :
Dès le collège, l'élève pourra être amené à effectuer une recherche à la main en exprimant chaque masse comme une somme ou une différence des masses données.

1 = 17-9-5-2
2 = 9-5-2
3 = 5-2
4 = 9-5
5 = 5
6 = 17-9-2
7 = 5+2
…

En Python :

En lycée, l'élève pourra être amené à écrire un programme Python permettant de déterminer toutes les masses accessibles.

```python
def ordonne_Liste(L):
    """
    Fonction qui ordonne les éléments d'une liste L
    """
    LL = L
    l = len(L)
    Liste_Ordonnee =[]
    for i in range(l):
        m = min(L)
        Liste_Ordonnee.append(m)
        try:
            LL.remove(m)
        except :
            pass
    return Liste_Ordonnee


def masses_possibles(a,b,c,d):
    """
    Fonction qui détermine les masses évaluables à l'aide d'une balance à plateaux
    si l'on dispose de 4 masses a, b, c, d.
    retourne deux listes les solutions et les masses impossibles à peser.
    """
    # Initialisation des listes
    Possibles = []
    Absentes = []

    # Détermination de la masse maximale accessible
    ttl = a+b+c+d

    # Liste Absente contient les masses non trouvée (au départ la liste est "pleine")
    for m in range(ttl):
        Absentes.append(m+1)

    # boucle effectuant toutes les pesées réalisables
    for i in range(-1,2):
        for j in range(-1,2):
            for k in range(-1,2):
                for l in range(-1,2):
                    # Chaque masse se voit affectée d'un coefficient -1, 0, 1
                    #traduisant sa présence sur le plateau de droite, de gauche ou son absence
                    p = a*i+b*j+c*k+d*l
                    # Complétion des listes
                    if (p not in Possibles) and (p>0):
                        Possibles.append(p)
                        try :
                            Absentes.remove(p)
                        except :
                            pass
    print("Les masses acessibles sont : ",ordonne_Liste(Possibles))
    print("Les masses impossibles à atteindre sont : ",ordonne_Liste(Absentes), " ainsi que celles supérieures à ", ttl)
    return Possibles, Absentes

masses_possibles(2,5,9,17)
```

Pour aller plus loin :

Défi n°2 (bis) : (proposé par David Rousseau)

Trouver quatre masses, de somme 40, permettant de peser toutes les masses entières de 1 à 40.

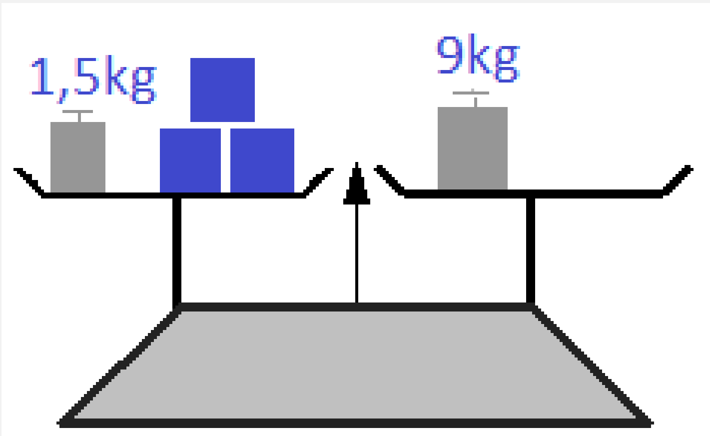
Défi n°3 :

On dispose de 4 masses qui sont toutes d'un poids différent et d'une balance à plateaux.
En combien de pesées minimum peut-on parvenir à ranger ces masses par ordre de poids croissant ?

Pour aller plus loin :
On dispose de 5 masses qui sont toutes d'un poids différent et d'une balance à plateaux.
En combien de pesées minimum peut-on parvenir à ranger ces masses par ordre de poids croissant ?

Défi 4 :

La balance représentée est à l'équilibre. Chaque petit cube du plateau de gauche possède la même masse.
Déterminer la masse de chacun de ces 3 cubes.



Défi n°5 :

Vous vous trouvez devant une source d'eau qui jaillit de la montagne, et vous disposez de deux tonneaux vides de capacités 5 litres et 3 litres. Effectuez une série de transvasements permettant d'obtenir exactement 4 litres d'eau dans l'un des tonneaux.

Au collège :
L'élève sera amené à élaborer une stratégie, et à présenter le fruit de sa réflexion à l'aide de schéma.

En Python :
Dans le cadre de l'enseignement de l'algorithmique, on retrouvera ce problème sur le site Algorea : http://www.france-ioi.org. Sur cette plateforme, les élèves auront à programmer, en langage Python (principalement), la solution à des problèmes mathématiques présentés de manière ludique. Une ressource incontournable pour aborder la programmation en Python dès le Cycle 4.

Une journée en enfer :
Enfin, vous retrouverez ce problème au détour du film d'action Die Hard : Une journée en enfer, avec Bruce Willis et Samuel L. Jackson. La vidéo disponible sur Youtube constituera un point d'accroche en classe.

<u>Concours Castor Informatique :</u>

Le Concours Castor Information est un concours de mathématiques qui a lieu chaque année. Il s'adresse aux élèves du secondaire (du cycle 3 à la Terminale). Il aborde de manière ludique de nombreux défis logiques et algorithmiques.

On retrouve notamment au travers de ce concours des exercices en lien avec notre problème du mois.
Dans les exercices qui suivent, l'élève aura à organiser des courses de chevaux afin de déterminer de manière optimale l'identité du cheval le plus rapide.

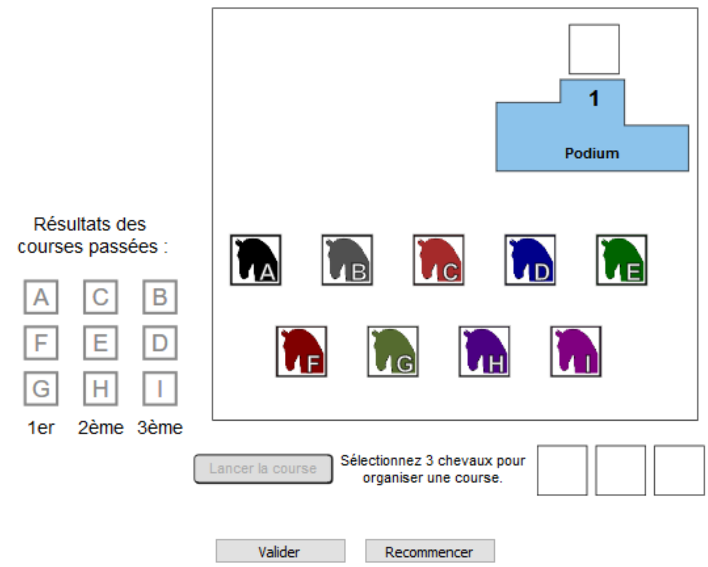
<u>Niveau 1 :</u>

Trouvez le cheval qui court le plus vite, en organisant le moins de courses possibles.

Trois chevaux participent à chaque course. Un même cheval court toujours à la même vitesse.

Pour organiser d'autres courses, cliquez sur les chevaux désirés, puis lancez la course.

Notez que trois courses ont déjà été effectuées.



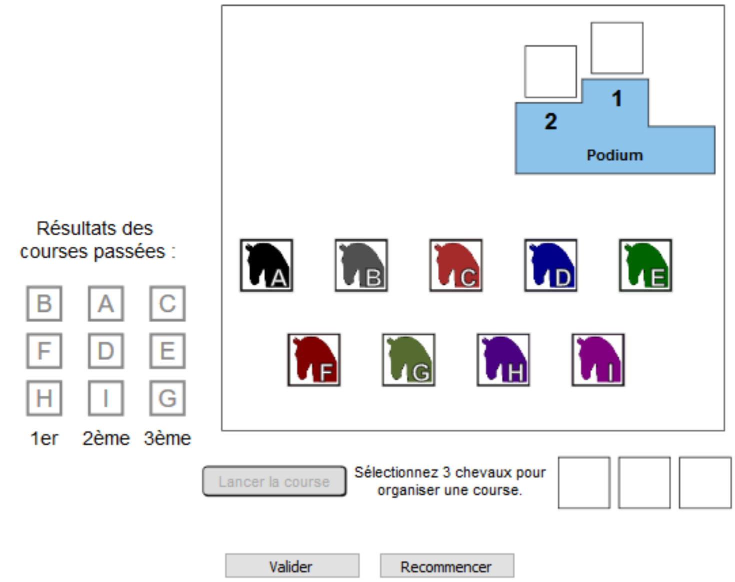
<u>Niveau 2 :</u>

Trouvez les **2** chevaux qui courent le plus vite, en organisant le moins de courses possibles.

Trois chevaux participent à chaque course. Un même cheval court toujours à la même vitesse.

Pour organiser d'autres courses, cliquez sur les chevaux désirés, puis lancez la course.

Notez que trois courses ont déjà été effectuées.



<u>Niveau 3 :</u>

Trouvez les **3** chevaux qui courent le plus vite, en organisant le moins de courses possibles.

Trois chevaux participent à chaque course. Un même cheval court toujours à la même vitesse.

Pour organiser d'autres courses, cliquez sur les chevaux désirés, puis lancez la course.

Notez que trois courses ont déjà été effectuées.