Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

académie Amiens
RÉGION ACADÉMIQUE HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens

Mercredi 15 mars 2017 de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

Série S

Énoncés de la deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

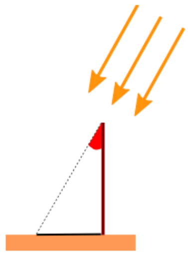
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique numéro 1

Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène

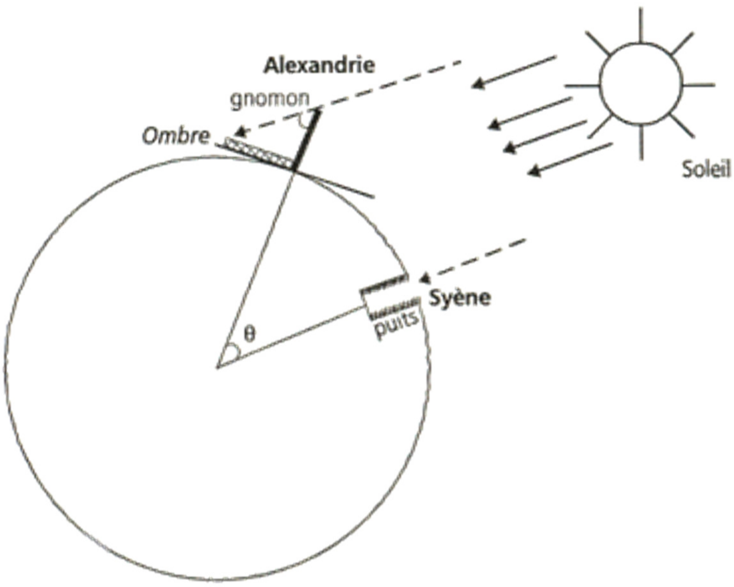
On a souvent tendance à penser qu'il a fallu attendre la Renaissance pour que l'humanité découvre que la Terre n'était pas plate. C'est une croyance fausse, car l'idée que la Terre soit ronde date de l'Antiquité, et était partagée par de nombreux savants comme Platon ou Aristote.
D'ailleurs en 200 avant J.C., Eratosthène a même réussi l'exploit de calculer la circonférence de la Terre à quelques centaines de kilomètres près, puisqu'il l'estima à $39\,375\ km$, alors que la valeur actuellement admise est autour de $40\,070\ km$!
Reprenons sa démarche.

Ératosthène partit du constat suivant :
« Dans la ville de Syène, à midi le jour du solstice d'été, le soleil éclaire le fond des puits ».
Que signifie cette phrase énigmatique ? Tout simplement qu'à Syène, le 21 juin à midi, le soleil est exactement à la verticale du sol (et que ses rayons peuvent donc atteindre le fond des puits.)
Pour déterminer la circonférence de la Terre, Ératosthène a alors réalisé une deuxième mesure.
Le 21 juin, mais cette fois à Alexandrie, il observa l'ombre d'un bâton (ou gnomon), et mesura l'angle qu'elle formait avec son sommet.
Il observa que le bâton mesurait 50 coudées et que son ombre mesurait 6 coudées $\frac{1}{3}$.



1) Montrer que l'angle colorié sur le schéma ci-contre mesure environ $7{,}2\,°$.

Voici un schéma de la situation :

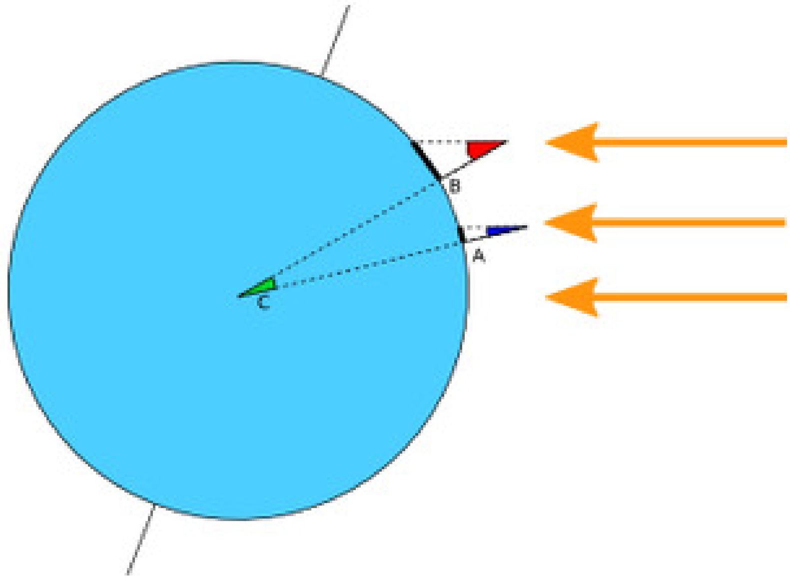


2) Que peut-on dire de l'angle θ indiqué sur le schéma précédent ? Justifier.

Pour calculer la distance entre les villes de Syène et d'Alexandrie, Ératosthène a requis l'aide d'un bématiste, c'est-à-dire quelqu'un dont le travail était de mesurer des distances. Le bématiste utilisait une méthode simple, il comptait le nombre de pas (bêma) d'un chameau lors du voyage entre des points. Le chameau étant réputé pour avoir une marche régulière, les calculs étaient d'une précision assez étonnante. Il a alors trouvé une mesure de $5\,000$ stades entre Alexandrie et Syène, soit environ $800\ km$ ce qui est très proche de la réalité.

3) En déduire que la circonférence de la Terre est d'environ $40\,000\ km$.

Pour reproduire le calcul d'Ératosthène, nul besoin d'aller en Egypte, ni d'attendre le solstice d'été.
On peut utiliser deux villes quelconques, du moment qu'elles sont bien situées sur le même méridien.
Notons A et B ces deux villes. C désigne le centre de la Terre.



On notera $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles représentés sur le schéma, en supposant que $\hat{B} > \hat{A}$.

4) Montrer que $\hat{C} = \hat{B} - \hat{A}$.

5) On note d la distance entre les villes A et B.
Exprimer, en fonction de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et d , la circonférence de la Terre.

Exercice académique numéro 2

Langage codé

Pour coder un message afin de le garder secret, on utilise la méthode de chiffrement suivante.

• On remplace chaque lettre du message par son rang x dans l'alphabet, allant de 0 pour A à 25 pour Z, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Les autres signes (virgules, espaces, points,…) sont supprimés.

• On calcule le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26.

• On remplace la lettre initiale x par celle ayant pour rang y.

Cette technique de codage est appelée <u>chiffrement affine</u>.

1) Vérifier, qu'en effectuant la division euclidienne de 89 par 26, on obtient 3 comme quotient et que le reste est 11.
   En déduire que, par cette méthode, la lettre M est codée par la lettre L.
2) Coder le mot MATHS.
3) On admet la propriété suivante que l'on pourra utiliser lorsque nécessaire dans toute la suite de l'exercice :
   Soient a et b deux entiers relatifs et c un entier naturel non nul.
   a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c si et seulement si a-b est un multiple de c.

   Montrer que, pour tout entier relatif k, si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c alors les entiers ka et kb ont le même reste dans la division euclidienne par c.
4) Soient x et y des entiers.
   a) Montrer que si y et $7x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26 alors $15y$ et x ont le même reste dans la division euclidienne par 26.
   b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
5) Déduire alors que :
   y et $7x + 5$ ont même reste dans la division euclidienne par 26 équivaut à x et $15y + 3$ ont même reste dans la division euclidienne par 26.
6) A l'aide de la question précédente, décoder le mot ZERLGJFAHB.

   Déchiffrer un message codé par un chiffrement affine ne pose pas de difficulté. La cryptographie utilise des techniques bien plus complexes pour crypter des textes ou des données et en assurer l'inviolabilité.