MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques

Académies d'Amiens et de Lille

Mercredi 13 mars 2019 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Série S

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique numéro 1

Nombres ETRANCHES

Notation :
Dans tout le problème, tout entier naturel non-nul n à p chiffres s'écrira dans le système décimal $n = \overline{n_1 n_2 ... n_p}$ tel que, pour tout entier *i* allant de 1 à *p*, n_i est un chiffre inférieur ou égal à 9, avec $n_1 \neq 0$.

Ce qui signifie que :

$$n = n_1 \times 10^{p-1} + n_2 \times 10^{p-2} + ... + n_{p-1} \times 10^1 + n_p$$

Par exemple, si on prend $n = 137$ alors on a $p = 3$ et $\overline{137} = 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7$.

Rappel :
Si a et b sont deux entiers naturels, tels que b soit non nul, la division euclidienne de a par b peut s'écrire :

$$a = b \times q + r \text{ où } 0 \leq r < b.$$

Dans cette division, le quotient q et le reste r sont des entiers naturels.

Par exemple, la division euclidienne de 123 par 5 s'écrit : $123 = 5 \times 24 + 3$. A noter que les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier naturel par 5 sont : 0, 1, 2, 3 ou 4.

Définition :
Un entier naturel $n = \overline{n_1 n_2 ... n_p}$ *est un nombre* ***ETRANCHE*** *si, pour tout entier i allant de 2 à p, l'entier naturel* $\overline{n_1 n_2 ... n_i}$ *est divisible par i.*

Par exemple, 2016 est nombre **ETRANCHE** à quatre chiffres. En effet :
- 20 est divisible par 2.
- 201 est divisible par 3.
- 2016 est divisible par 4.

Par contre 20 192 020 n'est pas un nombre **ETRANCHE** puisque 2019 n'est pas divisible par 4.

PARTIE 1
Détermination de nombres **ETRANCHES**.

Parmi les nombres qui se trouvent dans le tableau qui suit, recopier ceux qui sont des nombres **ETRANCHES** :

102	326	705
1024	2041	3268
10240	20410	70520
102404	326804	705204
1024041	7052046	9222467

PARTIE 2
Recherche des nombres **ETRANCHES** à deux, puis trois chiffres.

1. Justifier qu'il y a exactement 45 nombres **ETRANCHES** à deux chiffres.
2. Soit *n* un entier naturel non nul à trois chiffres s'écrivant $n = \overline{n_1n_2n_3}$.
   a) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier par 3 ?

   b) On suppose que $\overline{n_1n_2}$ est un nombre **ETRANCHE** à deux chiffres dont le reste dans la division euclidienne par 3 est égal à 0, c'est-à-dire un multiple de 3. On a donc $\overline{n_1n_2} = 3k$, où *k* est un entier naturel non nul.
Déterminer alors les valeurs possibles du chiffre n_3 tel que le nombre $\overline{n_1n_2n_3}$ soit un nombre **ETRANCHE** à trois chiffres.
   c) Même question pour un nombre $\overline{n_1n_2}$, un nombre **ETRANCHE** à deux chiffres s'écrivant sous la forme $3k+1$, puis $3k+2$, *k* étant un entier naturel non nul.

   d) Déduire de ce qui précède qu'il existe exactement 150 nombres **ETRANCHES** à trois chiffres.

   e) Combien y a-t-il d'entiers pairs parmi les nombres **ETRANCHES** à trois chiffres ?

3. Voici un algorithme écrit en langage naturel :

```
c←0
Pour i variant de 0 à 1 Faire
    m←quotient dans la division euclidienne de n par 10^(1−i)
    Si m est divisible par 2+i Alors
        c ← c + 1
    Fin du Si
Fin du Pour
Si c=2 Alors
    compteur ← 1
Sinon
    compteur ← 0
Fin du Si
```

a) Ecrire la trace de la boucle « pour » de cet algorithme en complétant ce tableau si la variable *n* contient la valeur 621.

i	*m*	*c*
0		
1		

b) Si la variable *n* contient la valeur 621, quelle serait la valeur affectée à la variable **compteur** à l'issue de l'exécution de l'algorithme ?

c) Si la variable *n* contient la valeur 622, quelle serait la valeur affectée à la variable **compteur** à l'issue de l'exécution de l'algorithme ?

d) Quel est le rôle de cet algorithme ?

PARTIE 3

Dénombrement des nombres **ETRANCHES** à quatre et cinq chiffres.

1. Soit n un entier naturel non nul à quatre chiffres.

n s'écrit donc $n = \overline{n_1 n_2 n_3 n_4}$.

a) Justifier qu'il existe un entier naturel k tel que $n = \overline{n_3 n_4} + 4 \times k$.

b) En déduire que l'entier naturel $n = \overline{n_1 n_2 n_3 n_4}$ est divisible par 4 si et seulement si $\overline{n_3 n_4}$ est divisible par 4.

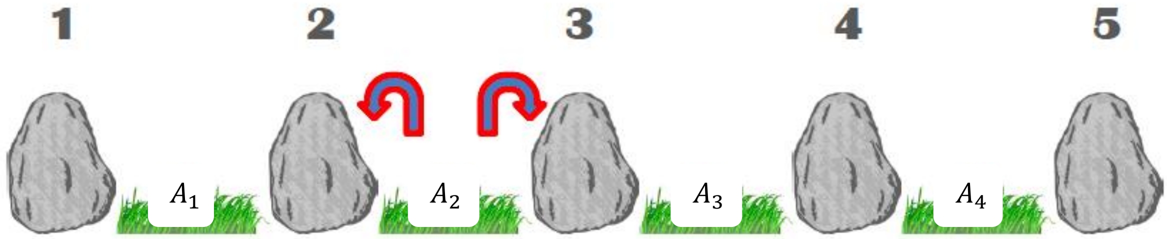
c) Justifier alors qu'il y a au total exactement 375 nombres **ETRANCHES** à quatre chiffres.

2. Combien y a-t-il de nombres **ETRANCHES** à cinq chiffres ?

Exercice académique numéro 2

Jeux ROCHERS

Dans un jeu vidéo, un joueur doit empêcher un « humanoïde » de franchir une frontière constituée de rochers espacés régulièrement comme l'illustre le dessin ci-dessous.



1. Le programme place l' « humanoïde » derrière un des rochers pour lancer l'attaque.

2. Alerté par le jeu, le joueur ne dispose que d'une grenade paralysante pour neutraliser l' « humanoïde ».

3. Le joueur déclenche l'envoi de la grenade qui atterrit entre deux rochers.

4. Si l' « humanoïde » est caché derrière l'un de ces deux rochers, celui-ci est neutralisé et la partie est gagnée par le joueur. Sinon l' « humanoïde » peut franchir la frontière et la partie est perdue par le joueur.

Sur l'illustration ci-dessus, l' « humanoïde » est caché et la grenade atterrit en A_2.
Si l' « humanoïde » est caché derrière le rocher 2 ou 3 alors il est neutralisé et le joueur gagne la partie. Sinon la partie est perdue par le joueur.

Notations :
- Dans tout le sujet, n désignera un entier naturel.

Pour un jeu à n rochers, $n \geq 3$:
- ☞ Le programme place l'humanoïde derrière les rochers 1, 2, …, n avec les probabilités respectives $p_1,\ p_2, \dots, p_n$. On rappelle que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- ☞ La grenade paralysante est envoyée dans l'un des intervalles A_1, …, A_{n-1} avec les probabilités respectives $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$. On rappelle que $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-1} = 1$; **ces probabilités sont définies** suivants deux modes :
  - Novice (voir situation 1).
  - Expert (voir situation 2).

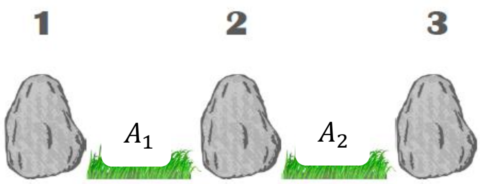
Le but général de ce sujet est d'étudier les stratégies que peut adopter le joueur en fonction du comportement de l' « humanoïde » programmé par le jeu.

Situation 1 : découverte du jeu et observations.

- ☞ Un joueur inexpérimenté joue avec l'hypothèse que le programme place aléatoirement l' « humanoïde » derrière les rochers de façon équiprobable.
- ☞ Il décide de jouer en mode novice.

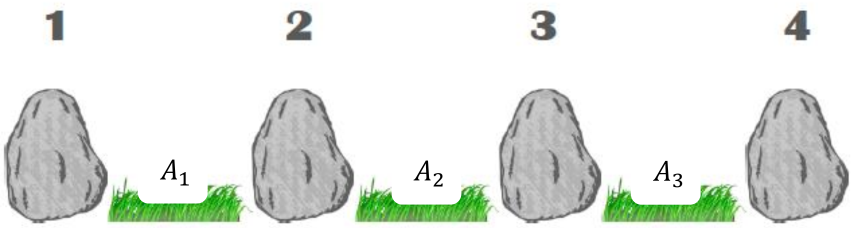
> ***Mode novice :***
> lorsque le joueur décide de lancer la grenade, celle-ci est envoyée aléatoirement dans l'un des intervalles A_1, …, A_{n-1} de façon équiprobable.

1. Jeu à trois rochers.



a. Déterminer les probabilités $p_1,\ p_2,\ p_3$.
b. Déterminer les probabilités q_1, q_2.
c. Quelle est la probabilité que le joueur gagne la partie lorsque la grenade atterrit en A_1 ?
d. En déduire la probabilité que le joueur gagne une partie.

2. Jeu à quatre rochers.



a. Compléter les cases vides du tableau croisé donné en annexe par :
- G si la partie est gagnée par le joueur.
- P si la partie est perdue par le joueur.

.

b. Entourer G (partie gagnée par le joueur) ou P (partie perdue par le joueur) dans l'arbre donné en annexe.

c. Existe-t-il un intervalle pour lequel la probabilité de gagner une partie par le joueur est la plus grande ?

3. Jeu à n rochers , $n \geq 4$.
Existe-t-il un intervalle pour lequel la probabilité de gagner une partie par le joueur est la plus grande ?

4. <u>Jeu à cinq rochers.</u>

Sur 2800 parties avec 5 rochers, un joueur a relevé les résultats suivants.

Intervalles	A_1	A_2	A_3	A_4
Nombre de lancers sur ces intervalles	698	704	695	703
Nombre de victoires sur ces intervalles	301	200	197	299

a. Pourrait-on penser que le nombre total de victoires observées s'accorde bien avec une répartition équiprobable de l' « humanoïde » derrière les rochers ?

b. Un site de « cheat code* » affirme que le programme du jeu place l' « humanoïde » derrière les rochers 1 et n avec pour chacun une probabilité égale à $2p$ et derrière les rochers 2 à $n-1$ avec pour chacun une probabilité égale à p.
   i. Déterminer alors la valeur du nombre p dans le cas où $n = 5$.
   ii. Les résultats observés semblent-ils être en accord avec l'affirmation du site ?

**Ce type de site fournit aux joueurs des astuces pour gagner plus facilement aux jeux.*

Situation 2 : choix de $q_1, \dots, q_{n-1}$ en mode expert.

On admet l'affirmation du « Cheat code » à savoir que pour $n \geq 3$:

- le programme du jeu place l' « humanoïde » derrière les rochers 1 et n avec pour chacun une probabilité égale à $\frac{2}{n+2}$ et derrière les rochers 2 à $n-1$ avec pour chacun une probabilité égale à $\frac{1}{n+2}$.
- Le joueur utilise le mode expert.

> ***<u>Mode expert :</u>***
> lorsque le joueur décide de lancer la grenade, celle-ci est envoyée aléatoirement dans l'un des intervalles A_1, …, A_{n-1} avec des probabilités $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ qu'il doit fixer en début de partie.

Problème : Le joueur veut alors déterminer $q_1, q_2, \dots\ q_{n-1}$ pour que la probabilité de gagner soit la même quel que soit l'intervalle où la grenade atterrit.

1. Justifier que $\frac{3}{n+2} q_1 = \frac{2}{n+2} q_2$.

2. Justifier que $2q_1 + (n-3)q_2 = 1$.

3. En déduire les probabilités q_1 et q_2 .

4. Répondre au problème posé.

ANNEXE

		A_1	A_2	A_3
Rocher	1			
	2			
	3			
	4			

G : le joueur gagne la partie.
P : le joueur perd la partie.