Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 11 mars 2020 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Premières autres que la première générale spécialité mathématiques

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Les triangles équilibrés de Steinhaus

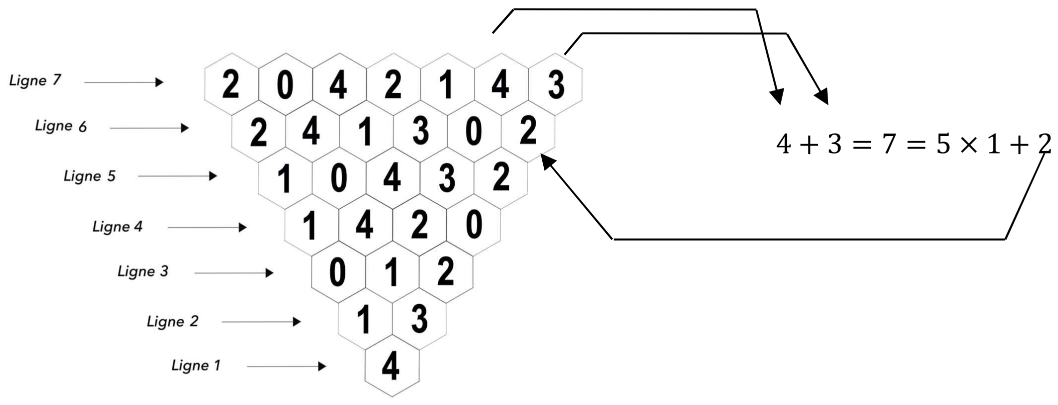
Définitions préalables

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit n un entier naturel non nul.

- On note S l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et $m-1$.
  Autrement dit : $S = \{0; 1; \ldots; m-1\}$.
- Un **triangle de Steinhaus de taille** n **modulo** m est construit de la manière suivante, comme précisé sur l'exemple :
  - La ligne du haut, notée Ligne n, est une succession de n cases placées côte-à-côte contenant chacune un élément appartenant à S. Ces éléments ne sont pas forcément des nombres distincts.
  - Puis, sous chaque paire de cases voisines contenant chacune un nombre de S, on place comme illustré ci-dessous une autre case contenant le reste de la division euclidienne de la somme de ces deux nombres par m.
  - On réitère cette opération pour chaque nouvelle ligne ainsi constituée, jusqu'à la Ligne 1 qui ne comporte qu'une case.
- Le **nombre** de cases constituant un **triangle de Steinhaus de taille** n est noté T_n.
- Un **triangle de Steinhaus de taille** n **modulo** m est dit **« équilibré »** lorsqu'il contient chacun des éléments de l'ensemble S à parts égales.

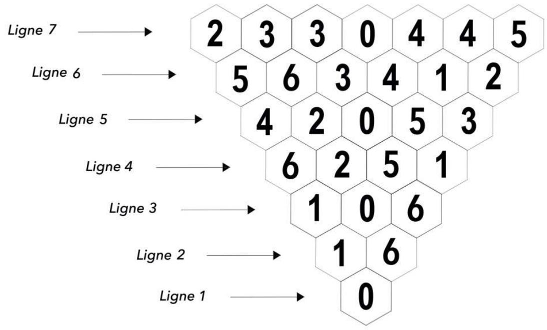
Exemples :

- Pour le triangle de Steinhaus de taille 7 modulo 5 ci-dessous, $T_7 = 28$.



Ce triangle de Steinhaus n'est pas « **équilibré** » car il contient 7 fois le nombre 2 et 5 fois le nombre 0.

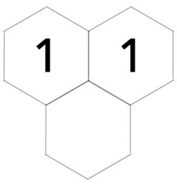
☞ Par contre, le triangle de Steinhaus de taille 7 modulo 7 ci-dessous est bien « **équilibré** ». En effet, il possède exactement 4 fois chacun des nombres de 0 à 6.



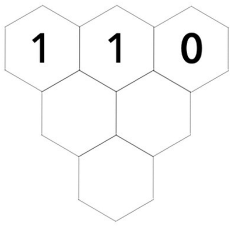
<u>Partie 1</u> : Prise en main des triangles de Steinhaus.

1. Compléter les **triangles de Steinhaus ci-dessous** pour des valeurs de *n* et de m données.

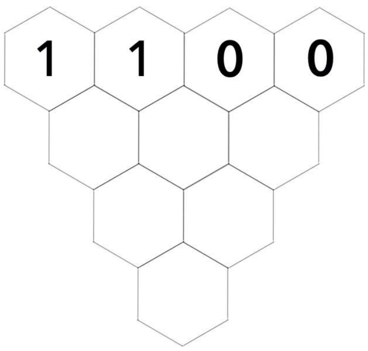
Triangle T_A
$m = 2$
n=2



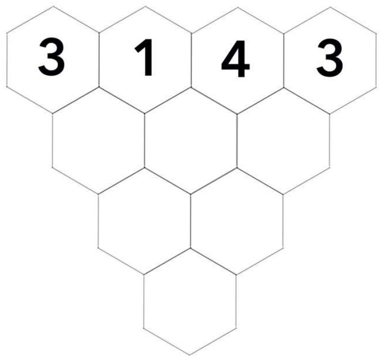
Triangle T_B
$m = 2$
n=3



Triangle T_C
$m = 2$
n=4

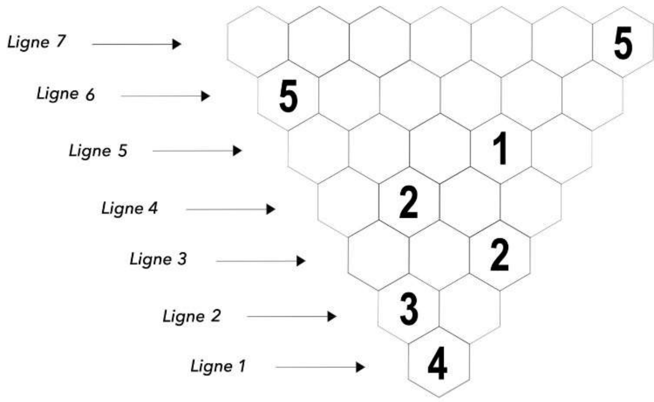


Triangle T_D
$m = 5$
n=4



2. Parmi ceux-ci, lesquels sont « **équilibrés »** ?

3. Compléter ce **triangle de Steinhaus de taille 7 modulo 6** :



4. Justifier qu'un triangle de Steinhaus est entièrement défini par la donnée d'un élément par ligne.

<u>Partie 2</u> : Equilibré et rester équilibré … Est-ce possible ?

Dans cette partie, l'entier naturel *m* est égal à 2.

Soit n un entier naturel non nul.
On émet alors les conjectures suivantes :

- ☞ *C1 : tout* ***triangle de Steinhaus de taille*** $n+1$ ***« équilibré »*** *est obtenu à partir d'un* ***triangle de Steinhaus de taille*** n ***« équilibré »*** *auquel on a rajouté une ligne au-dessus de la Ligne n.*
- ☞ *C2 : tout* ***triangle de Steinhaus de taille*** n ***« équilibré »*** *peut être étendu d'une ligne au-dessus de la Ligne n pour former un nouveau* ***triangle de Steinhaus de taille*** $n+1$ *lui-même* ***« équilibré »****.*

1. Existe-t-il un triangle « **équilibré »** si $n = 2$?
2. **a.** Donner les 8 **triangles de Steinhaus de taille** $n = 3$.
   b. Lesquels sont « **équilibrés** » ?
3. **a.** Parmi les triangles « **équilibrés »** de taille 3, lesquels peuvent-être étendus d'une ligne au-dessus de la Ligne 3 pour obtenir un **triangle de Steinhaus « équilibré » de taille 4**.
   b. Un **triangle de Steinhaus de taille 4 « équilibré »** est-il nécessairement l'extension d'un t**riangle de Steinhaus de taille 3 « équilibré »** ?
4. Conclure quant aux conjectures *C1* et *C2* émises précédemment.

Exercice académique 2

L'addition martienne

Une calculatrice dispose d'une touche $\oplus$ qui, pour deux nombres a et b donnés, donne le nombre noté $a \oplus b$ et égal à $a + b + ab$.
Ainsi : $3 \oplus 5 = 23$.
Cette calculatrice fonctionne de la manière suivante : chaque fois que l'on introduit un nombre, elle calcule le résultat de l'opération $\oplus$ de ce nombre avec le nombre précédemment affiché, et affiche le nouveau résultat.
Pour la mise en marche, la calculatrice affiche 0.

1. Un utilisateur entre successivement les trois nombres 5 ; 10 et 20. Quel est le dernier résultat affiché par la calculatrice ?
2. Un utilisateur entre successivement les quatre nombres 3 ; 8 ; 8 et 100. Quel est le dernier résultat affiché par la calculatrice ?
3. Justifier que dès que l'on entre la valeur -1, le résultat obtenu est -1; et que réciproquement, le résultat -1 ne peut être obtenu qu'après avoir entré la valeur -1.
4. Montrer que pour tout nombre a entré différent de -1, le résultat 0 ne peut être obtenu qu'avec un seul nombre b que l'on exprimera en fonction de a.
5. Un utilisateur introduit successivement quatre nombres entiers naturels a, b, c et d tels que $a \leq b \leq c \leq d$.
   - **a.** Montrer que le dernier résultat affiché par la calculatrice peut s'écrire sous la forme :
     $$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) - 1.$$
     On pourra utiliser l'égalité $a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1$.
   - **b.** Sachant que la calculatrice affiche le résultat 2020, déterminer les nombres a, b, c et d introduits par l'utilisateur.
   - **c.** Que peut-on dire des quatre nombres a, b, c et d si le résultat affiché par la calculatrice est 2026 ?
   - **d.** Quel nombre entier naturel doit-on entrer quatre fois de suite pour obtenir un résultat égal à 9 999 ?