MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

# Olympiades nationales de mathématiques

-----------------

## Académie d'Amiens

Mardi 23 mars 2021 de 13h00 à 17h10

Pause de 15h00 à 15h10

## Premières autres que la première générale spécialité mathématiques

Énoncés de la deuxième partie de 15h10 à 17h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# *Exercice académique 1*

## *Memento*

Soit $N$ un entier naturel non nul.

Dans cet exercice, on pourra utiliser la formule : $1 + 2 + \cdots + N = \frac{N \times (N+1)}{2}$.

**Présentation du jeu**

Dans cet exercice, on appelle *paire* deux cartes portant le même symbole. On considère un paquet formé de $n$ paires de cartes, les symboles portés par ces paires étant deux-à-deux distincts. Ces $2n$ cartes sont alors disposées aléatoirement en ligne, faces cachées, de gauche à droite : une telle disposition sera appelée *alignement*.

La règle consiste à tirer les deux premières cartes (les plus à gauche) : si c'est une paire, on les retire du jeu et on réaligne les cartes restantes en conservant leur ordre, sinon elles sont remises en place faces cachées et on recommence avec les cartes 1 et 3, puis 1 et 4 et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste plus de carte.

Voici un exemple de partie avec 3 paires :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Les 6 cartes sont alignées de manière aléatoire. | On retourne les cartes 1 et 2, elles ne forment pas une paire. | On retourne les cartes 1 et 3, elles forment une paire : on les retire du jeu. | Les 4 cartes restantes sont réalignées, et on recommence. | On prend les deux premières cartes : c'est une paire, on les retire. | Ne reste plus que deux cartes… | … qui forment la dernière paire du jeu. |

Cet exemple a donc été terminé en 4 tirages.

1. Représenter un alignement de trois paires se terminant en 3 tirages.
2. Un alignement de 3 paires peut-il être terminé en 2 tirages ?
3. Au maximum, en combien de tirages peut être terminé un alignement de 3 paires ? Représenter un alignement de 3 paires maximisant le nombre de tirages nécessaires.
4. On considère un alignement de $n$ paires.
   - **a.** Au minimum, combien de tirages sont-ils nécessaires pour terminer un tel alignement ?
   - **b.** Montrer que le nombre maximum de tirages nécessaires est $M_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$.
   - **c.** Montrer que $M_n = n^2$.
     (Pour cela, on pourra remarquer que $M_n = (1 + 2 + \cdots + (2n-1) + 2n) - (2 + 4 + \cdots + 2n)$ et utiliser la formule donnée au début de l'exercice).

**5.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $m_n$ le nombre moyen de tirages à effectuer pour terminer un alignement de $n$ paires, et $p_n$ le nombre moyen de tirages à effectuer dans un alignement de $n$ paires avant de retirer la première paire.

**a.** Déterminer $m_1$ et $p_1$.

**b.** Compléter le tableau ci-contre et en déduire $p_2$. De la même façon, calculer $m_2$.

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Nombre d'alignements à 2 paires pour lesquels la première paire est obtenue au $k$-ième tirage | | | | |

**c.** Calculer $p_3$.

**d.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = n$.

**e.** Expliquer la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_{n+1} = p_{n+1} + m_n$.

**f.** On considère l'algorithme suivant :

```
Affecter à m la valeur 1.
Pour p entier allant de 2 à 4 :
        Affecter à m la valeur p + m.
Afficher m.
```

Quel est le résultat affiché par cet algorithme ? Un entier naturel $n$ étant demandé à l'utilisateur, modifier cet algorithme pour qu'il affiche la valeur de $m_n$.

**g.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$. En calculant de deux façons différentes l'expression $(m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + \cdots + (m_n - m_{n-1})$, déterminer une expression simple de $m_n$.

## *Exercice académique 2*

## *Une drôle de somme*

**Notations :**

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls est noté $\mathbb{Q}^+$.

On rappelle que, pour tout nombre $x$ non nul de $\mathbb{Q}^+$, il existe un unique couple $(a,b)$ d'entiers naturels premiers entre eux tel que $x=\frac{a}{b}$. Le quotient $\frac{a}{b}$ est la forme fractionnaire irréductible (en abrégé, FFI) de $x$.
Par convention, la forme fractionnaire irréductible de 0 est $\frac{0}{1}$.

**Définition :**
Soient $x$ et $y$ deux nombres appartenant à $\mathbb{Q}^+$. Leur FFI respectives sont notées $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ($a,b,c,d$ sont des entiers naturels, $b$ et $d$ sont non nuls, $a$ et $b$ sont premiers entre eux, $c$ et $d$ sont premiers entre eux).
La **« drôle de somme »** de $x$ et $y$ est définie par :

$$x\oplus y=\frac{a+c}{b+d}.$$

1. Montrer que la FFI de $\frac{2}{3}\oplus\frac{3}{8}$ est égale à $\frac{5}{11}$ et que celle de $\frac{2}{3}\oplus\frac{3}{7}$ est égale à $\frac{1}{2}$.

2. Calculer la FFI de $2020\oplus\frac{1}{2021}$.

3. Soient $x$ et $y$ deux rationnels positifs.
   a. Montrer que $x\oplus y$ est un rationnel positif.
   b. On note $\frac{a}{b}$ la FFI de $x$ et $\frac{c}{d}$ la FFI de $y$. La FFI de $x\oplus y$ est-elle toujours $\frac{a+c}{b+d}$ ?

4. Chacune des affirmations suivantes est soit vraie soit fausse. Préciser pour chacune ce qu'il en est, en justifiant la réponse.
   a. Pour tout $x\in\mathbb{Q}^+$, $x\oplus 0=x$.
   b. Pour tout $x\in\mathbb{Q}^+$, $x\oplus x=x$.
   c. Pour tous $x,y\in\mathbb{Q}^+$, $x\oplus y=y\oplus x$.
   d. Pour tous $x,y,z\in\mathbb{Q}^+$, $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$.
   e. Pour tous $x,y\in\mathbb{Q}^+$, non nuls, $\frac{1}{x}\oplus\frac{1}{y}=\frac{1}{x\oplus y}$.

5. Interprétation géométrique : On se place dans le plan, muni d'un repère $(O,I,J)$.
   Pour $x\in\mathbb{Q}^+$, de FFI $\frac{a}{b}$, on note $M_x$ le point de coordonnées $(b;a)$.
   Soient $x,y\in\mathbb{Q}^+$, non nuls. Montrer que la droite $(OM_{x\oplus y})$ est une médiane du triangle $OM_xM_y$.

6. Soient $x,y\in\mathbb{Q}^+$, non nuls, de FFI respectives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$. On suppose que $a>c$ et $b<d$.
   Montrer que l'aire du triangle $OM_xM_y$ est $\frac{ad-bc}{2}$.