

**OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES**

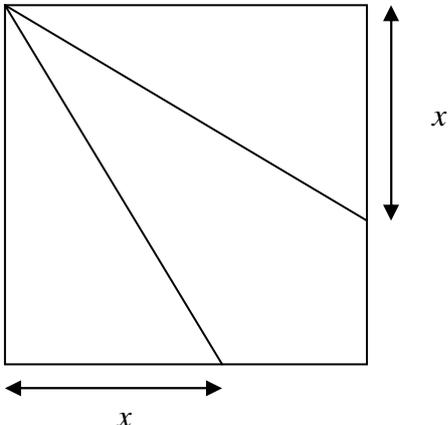
**SESSION 2008**

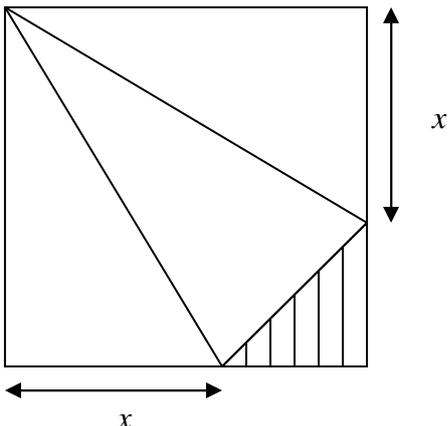
**MERCREDI 12 MARS 2008 (14h – 18h)**

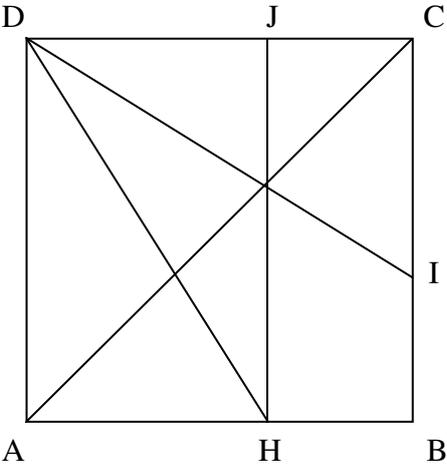
**SUJET PREMIERES ES / L /STG**

## EXERCICE 1

### Un partage équitable

 <p>A square with side length 1. A point on the bottom side is at distance <math>x</math> from the left corner. A line segment connects the top-left corner to this point. Another line segment connects the top-left corner to a point on the right side. The region between these two lines and the top and right sides is shaded.</p>	<p>1) Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.</p> <p>Quelle valeur doit-il donner à <math>x</math> pour arriver à ses fins ?</p>
---	---

 <p>A square with side length 1. A point on the bottom side is at distance <math>x</math> from the left corner. A line segment connects the top-left corner to this point. Another line segment connects the top-left corner to a point on the right side. The region between these two lines and the bottom and right sides is shaded with vertical lines.</p>	<p>2) Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.</p> <p>Peuvent-elles avoir la même aire ?</p>
---	---

 <p>A square <math>ABCD</math> with vertices labeled. Diagonals <math>AC</math> and <math>BD</math> intersect at point <math>J</math>. A vertical line segment <math>HJ</math> is drawn from point <math>H</math> on the bottom side <math>AB</math> to point <math>J</math>. A line segment <math>DI</math> is drawn from point <math>D</math> to point <math>I</math> on the right side <math>BC</math>.</p>	<p>3) Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point <math>H</math> la perpendiculaire <math>(HJ)</math> à la droite <math>(AB)</math>.</p> <p>Il a l'impression que les droites <math>(HJ)</math>, <math>(DI)</math> et <math>(AC)</math> sont concourantes.</p> <p>Qu'en est-il ?</p>
---	---

## EXERCICE 2

### Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$ , donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$  ;  $3 = 1 + 1 + 1$  et  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$  ; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1) Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».

2) Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».

3) Montrer que si  $n$  est « bon », alors  $2n+2$  et  $2n+9$  sont « bons ».

4) On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».

Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

### EXERCICE 3

Devant un bocal de caramels, Pascal se dit :

« Pour être sûr d'avoir :

- Deux caramels de la même couleur, il faudrait que j'en prenne au minimum 4 ;
- Deux caramels de couleurs différentes, il faudrait que j'en prenne au minimum 12 ;
- Deux caramels bleus, il faudrait que j'en prenne au minimum 10 ;
- Deux caramels verts, il faudrait que j'en prenne au minimum 16. »

Combien y a-t-il de caramels dans le bocal ?

### EXERCICE 4

Un commerçant effectue trois remises successives sur un article d'un prix de 300 € et le vend finalement 222,87 €.

Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières ?