

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

MERCREDI 11 MARS 2009 (14h – 18h)

SUJET PREMIERE ES / L / STG / ST2S

Exercice 1 :

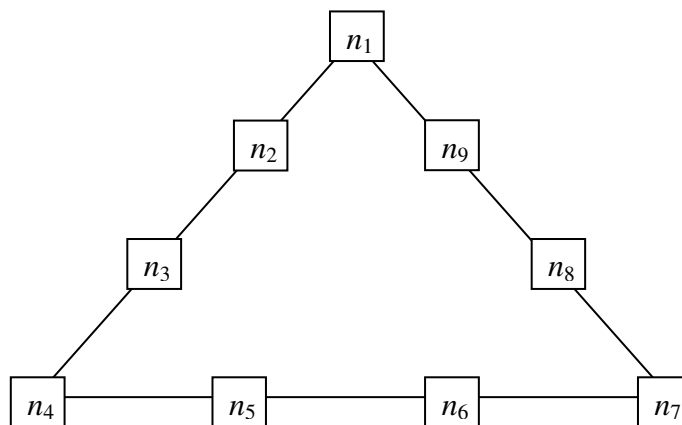
Partie A : Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

- 1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
- 2- Quelle est la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

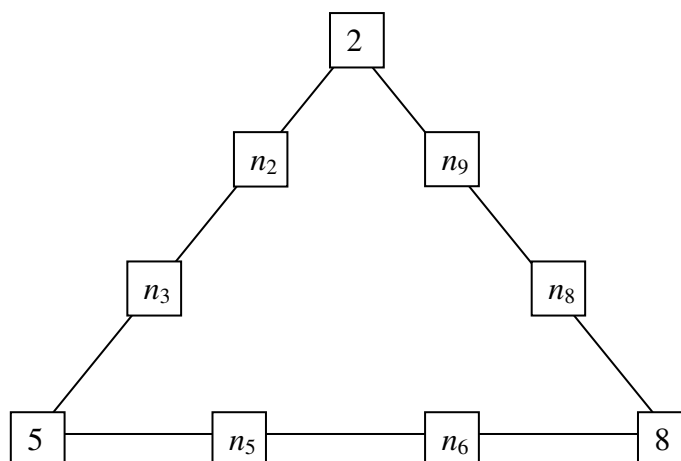


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S , on dit que le triangle est S -magique.

(C'est-à-dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S .

- 1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S -magique de somme $S = 20$.



- 2- On considère un triangle S -magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
 - a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
 - b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$.
 - c. Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
- 3- Proposer un triangle 17-magique.
- 4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
- 5-
 - a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
 - b. Proposer un triangle 19-magique.
- 6- Prouver que, s'il existe un triangle S -magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.
- 7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S -magique ?

Exercice 2 :

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

- 1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.
- 3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers. Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?
- 4- A partir d'une feuille de longueur L , on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ. Exprimer, en fonction de L , la largeur l de la feuille de départ.
- 5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3 :

Un ensemble E de nombres entiers positifs ou nuls possède les deux propriétés suivantes :

- (P1) si $x \in E$, alors $2x^3 + 2 \in E$;
- (P2) si x et y sont deux éléments de E , leur différence, si elle est positive ou nulle, est aussi un élément de E .

1- On suppose ici que $2 \in E$.

- a. 18 est-il un élément de E ?
- b. Montrer que 0 est dans E .
- c. 2008 est-il dans E ?

2- On suppose désormais que E est non vide. 2008 appartient-il à E ?

Exercice 4 :

Le père Iclès possède un terrain en forme d'hexagone.

Comme l'indique la figure, les deux plus petits côtés ont la même longueur et ses angles intérieurs mesurent tous 90, 45 ou 225 degrés.

Lorsqu'on lui demande la superficie de son terrain, le père Iclès répond : « La diagonale [AB] mesure 152 mètres exactement. Vous en savez assez pour calculer la superficie du terrain. »

Quelle est l'aire du terrain du père Iclès ?

