

# OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

**SESSION 2011**

**MERCREDI 23 MARS 2011 (8h – 12h)**

**SUJET PREMIERE ES / L / STG / ST2S**

**Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.**

## Exercice National 1 : Essuie-glaces

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

- 1) Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment  $[OB]$ . Soit  $A$  le point de  $[OB]$  tel que  $OA = 15$  cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment  $[AB]$  (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point  $O$  un angle de  $180^\circ$ . En donner une valeur arrondie au  $\text{cm}^2$  près.

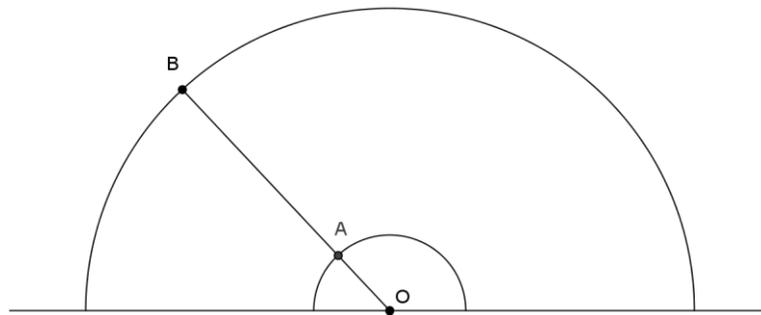


Fig. 1

- 2) Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments  $[OB]$  et  $[O'B']$  de même longueur  $R$ , l'un tournant autour d'un point  $O$ , l'autre autour d'un point  $O'$ , tels que  $OO' = R$  (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au dessus de la droite  $(OO')$ . Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

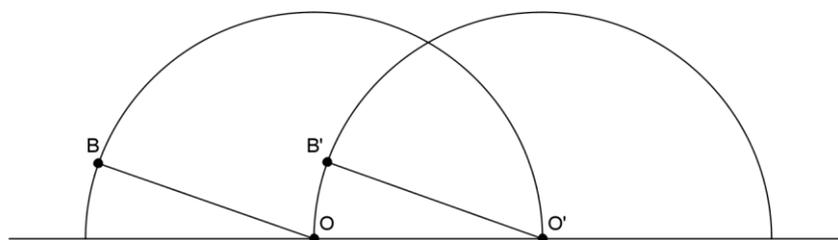


Fig. 2

- 3) Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment  $[AB]$ , qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment  $[OC]$  qui relie le centre de rotation  $O$  à un point  $C$  du segment  $[AB]$  tels que  $\widehat{OCA} = 30^\circ$ ,  $CB = 4 \times CA$  et  $OC = \sqrt{3} \times CA$ . On pose  $CA = a$ .

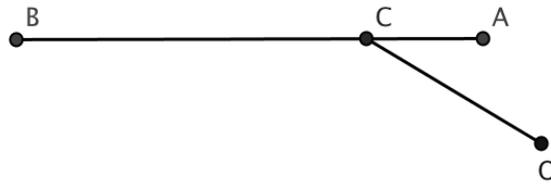


Fig. 3

- a) Démontrer que le triangle  $AOC$  est isocèle.
- b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point  $O$ . En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  coïncident respectivement avec les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  du pare-brise tels que  $[MN]$  est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course  $A$ ,  $B$ ,  $C$  coïncident respectivement avec les points  $M'$ ,  $N'$  et  $P'$  du pare-brise tels que le segment  $[OM']$  est horizontal. Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point  $O$  pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de  $a$  l'aire de la surface essuyée par le balai.

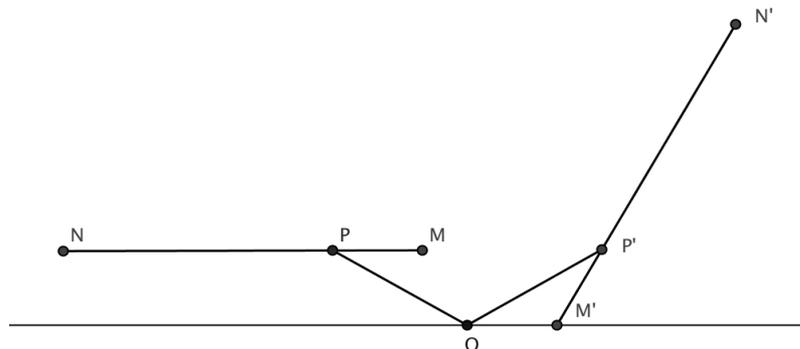


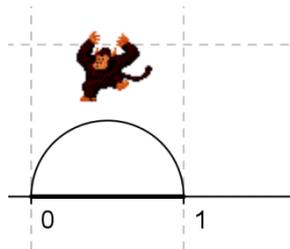
Fig. 4

## Exercice National 2 : Le singe sauteur

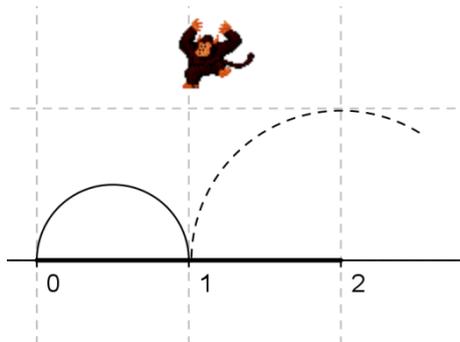
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre  $n$  est dit *atteignable* si le singe peut, en partant de l'*origine* (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse  $n$  en *exactement*  $n$  bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, ...,  $n$  (*effectués* dans cet ordre) et sans *jamais* sortir du segment  $[0; n]$ .

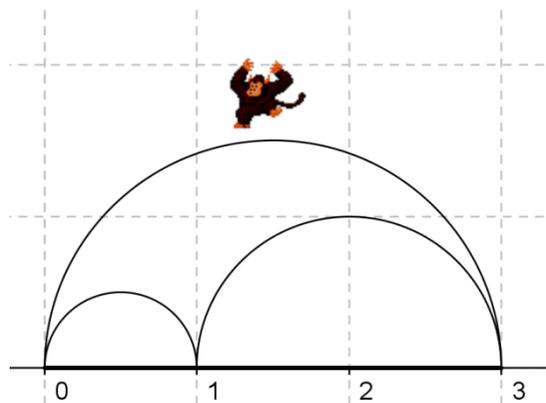
*Par exemple* : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle  $[0; 2]$ .



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle  $[0; 3]$ ) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



- 1) Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
- 2) Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de même que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

- 3) Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier  $m$ , on a :  $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ .

- 4) Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
- 5) a) Montrer que si le nombre entier  $n$  est atteignable alors le produit  $n(n-1)$  est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier  $n$  pour qu'il soit atteignable.  
b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
- 6) On suppose  $N \geq 6$  et atteignable par une séquence qui commence par  $1 + 2 + 3 + \dots$ . Montrer que  $N + 4$  est aussi atteignable.

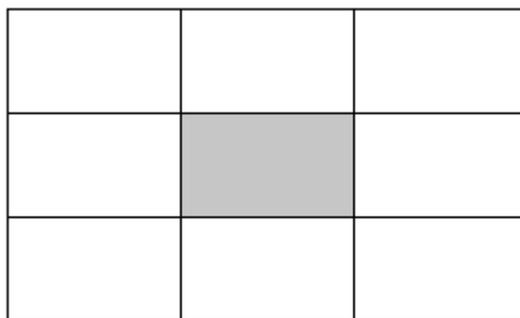
### **Exercice Académique 1 : La carte au trésor**

Une carte indique qu'un trésor est situé dans un terrain rectangulaire à 1260 m d'un coin, à 320 m du coin opposé et à 1120 m d'un troisième coin.

A quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

### **Exercice Académique 2 : La famille Dupont**

Au trente-septième étage d'une tour vivent vingt personnes réparties dans huit appartements disposés ainsi :



Les heureux élus qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au nord, font face à la prison.

Quant à ceux qui regardent à l'ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial.

Aucun appartement n'est vide ; en revanche, les Dupont, qui sont l'unique famille nombreuse de l'étage, se trouvent à l'étroit dans leur F4.

Au fait, quel appartement habitent les Dupont et combien sont-ils ?