OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2010

MERCREDI 10 MARS 2010 (14h – 18h)

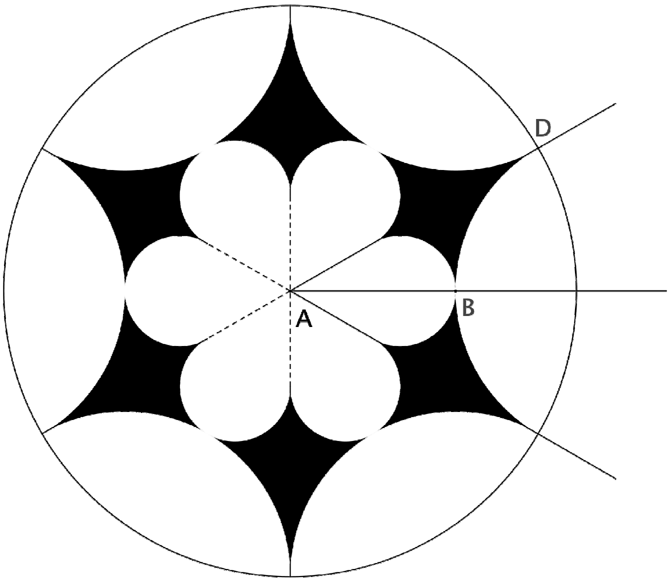
SUJET PREMIERE S

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

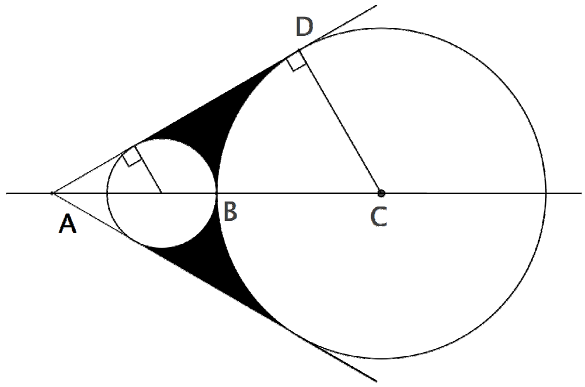
<u>Exercice National 1 :</u> ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1) Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2) a) Montrer que $AB = BC$.
   b) Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
   c) D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3) On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice National 2 : *A la recherche du « chaînonze »*

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11 ».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7+9-5=11$ et $0+9-9=0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1) Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2) Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010$^{\text{ème}}$ chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3) Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constate-t-on ?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4) On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
   a) Etudier le cas particulier « a a ».
   b) Etudier le cas $b=a-1$.
   c) Etudier les autres cas.

5) Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice Académique 1 : *Un encadrement*

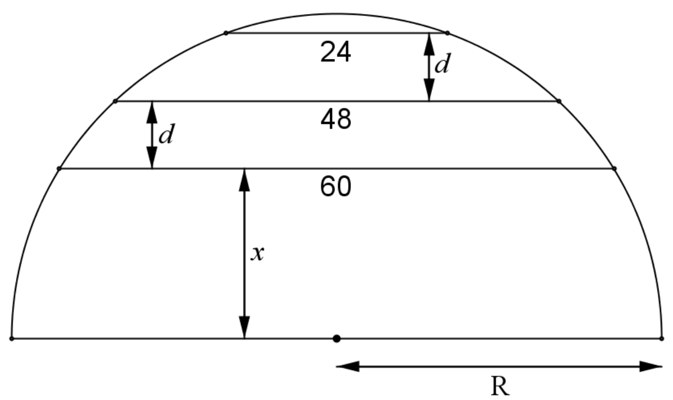
On considère un carré ABCD de côté 1.
On place des points E, F, G et H respectivement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
On veut prouver que $2 \leq EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \leq 4$.

1) a) Montrer que, pour tous réels x et y positifs, $x^2 + y^2 \leq (x+y)^2$.
   b) En déduire que $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \leq 4$ (penser à utiliser le théorème de Pythagore).

2) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, on a $2x^2 - 2x \geq -\frac{1}{2}$.
   b) En remarquant que $EB = 1 - AE$, montrer que $AE^2 + EB^2 \geq \frac{1}{2}$.
   c) En déduire que $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \geq 2$.

Exercice Académique 2 : *Le soupirail*

Un soupirail a la forme d'un demi-cercle. A partir d'une certaine hauteur x, on installe trois barres de sécurité de longueur 24, 48 et 60 cm espacées de la même distance d.



1) Calculer le rayon R du soupirail.

2) On souhaite ajouter une quatrième barre sous la barre de 60 cm, toujours à la distance d.
   Quelle longueur doit-on prendre ?