OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

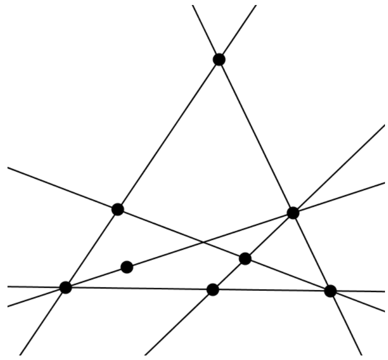
SESSION 2014

Mercredi 19 mars 2014
8h00-12h00

SUJET PREMIERE S

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Exercice National 1 : Figures équilibrées



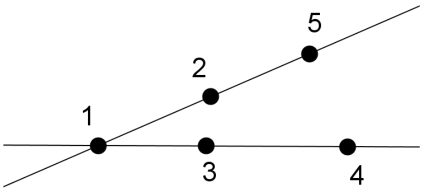
La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

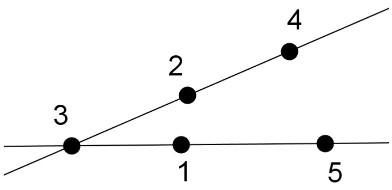
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



$K = 8$

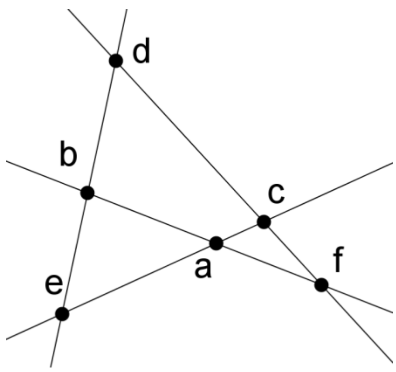


$K = 9$

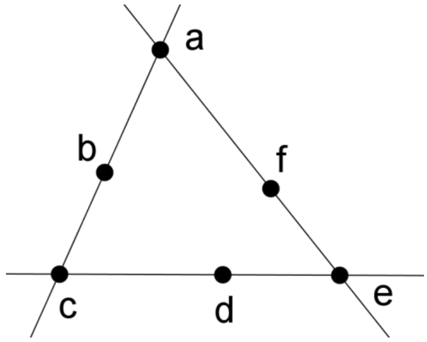
Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

   a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

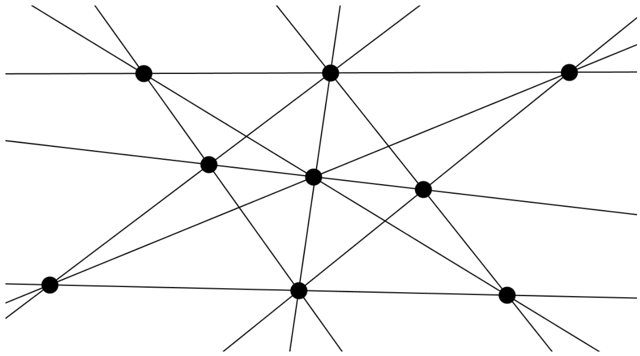


4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.



a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice National 2 : Le plus court possible

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

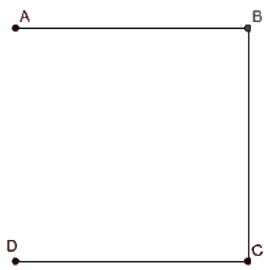


fig. 1
Assistant n°1

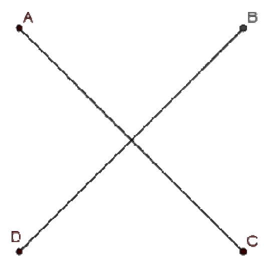


fig. 2
Assistant n°2

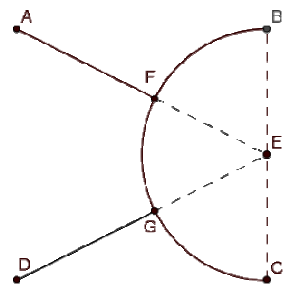


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

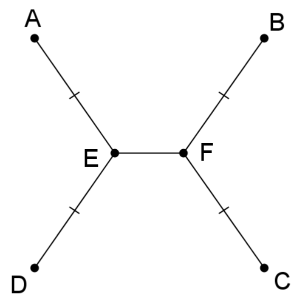


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

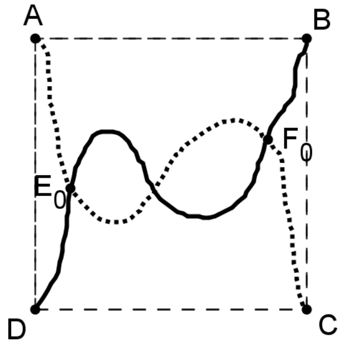


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

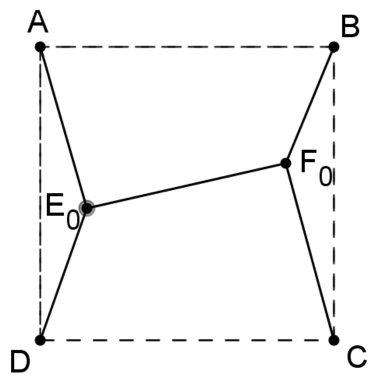


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

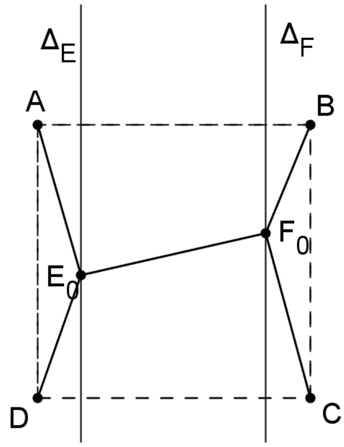


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

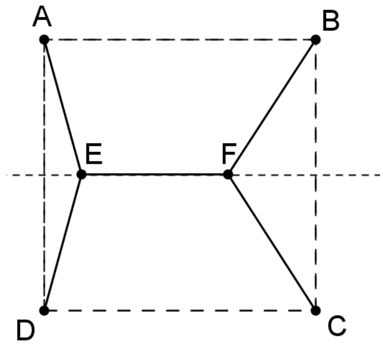


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

Exercice Académique 1 : Approximations de $\sqrt{17}$ par des rationnels

1) Vérifier l'égalité $\sqrt{17} = 4 + \dfrac{1}{\sqrt{17}+4}$.

2) Soit a et b deux réels supérieurs ou égaux à 4 et encadrant $\sqrt{17}$:

$$a < \sqrt{17} < b \qquad (1).$$

a) Justifier le nouvel encadrement

$$4 + \frac{1}{b+4} < \sqrt{17} < 4 + \frac{1}{a+4} \qquad (2).$$

b) Calculer l'amplitude de l'encadrement (2) et montrer que cette amplitude ne dépasse pas $\dfrac{1}{64}(b-a)$.

c) Interpréter ce résultat en termes de précision des encadrements (1) et (2).

3) Application :

On considère l'encadrement $4 < \sqrt{17} < 5$ (étape 0).

a) Déterminer, à l'aide de (2), un nouvel encadrement rationnel de $\sqrt{17}$ (étape 1), et donner l'amplitude de cet encadrement.

b) A l'aide de l'encadrement obtenu à l'étape 1 et de (2), donner un nouvel encadrement de $\sqrt{17}$ (étape 2).

c) Continuer jusqu'à l'étape 3.

Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?

4) On souhaite obtenir un encadrement de $\sqrt{17}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-9} à l'aide du procédé décrit ci-dessus pour toutes valeurs de *a* et *b* choisies vérifiant les conditions du 2).
Pour cela, on souhaite réaliser un algorithme qui enchaîne les étapes jusqu'à la précision exigée sur l'amplitude.

a) Que réalise l'algorithme suivant :

```
Saisir A, B
C prend la valeur de A
A prend la valeur de B
B prend la valeur de C
Afficher A et B
```

b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde à la question 4

```
Saisir A, B
E = B – A                  # On utilisera E pour l'amplitude de l'encadrement
N = 0                      # On utilisera N pour numéroter les étapes

…

Afficher A, B, E, N
```

Exercice Académique 2

On suppose qu'une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie la propriété (P) :

$$f(m+n) = f(m) + f\big(f(n)\big) \quad \text{pour tout } m \text{ de } \mathbb{N} \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la valeur de $f(f(0)$.
En déduire la valeur de $f(0)$.

2. Montrer que :

$$f\big(f(n)\big) = f(n) \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

3. Exprimer $f(m+1)$ en fonction de $f(m)$ et de $f(1)$.

4. Montrer que :

$$f(m) = mf(1) \text{ pour tout } m \text{ de } \mathbb{N}.$$

5. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (P).