Olympiades académiques de mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Académie d'Amiens

Mercredi 18 mars de 8 heures à 12 heures

Séries STI2D / STI2A

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de … heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

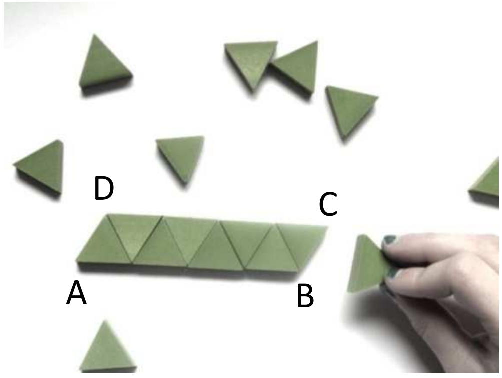
Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.

Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.

Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

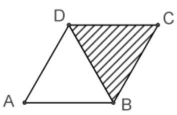
- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].



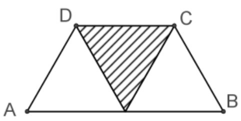
PARTIE 1

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

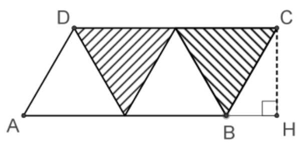
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



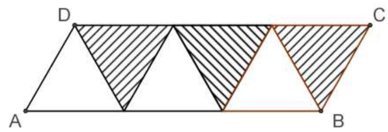
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

PARTIE 2

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

PARTIE 3

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

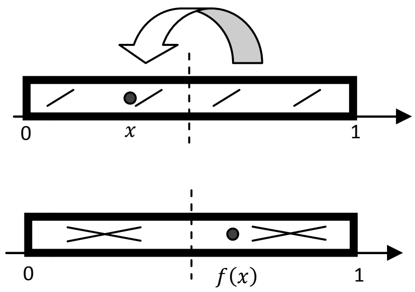
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi (détaillez votre démarche)? Si oui, démontrez-le.

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions suivant l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commentez.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme suivant afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0. Que se produit-il si l'hypothèse de travail de cette question n'est pas vérifiée ?
5. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
6. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après la question 6, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancez une explication.

Annexe.

Variables

x est un élément de $[0\,,1]$

Début

Saisir le nombre x compris entre 0 et 1

Tant que $x \neq 0$ **faire**

Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**

x **prend la valeur** $2\,x$

Sinon

x **prend la valeur** $2(1-x)$

Fin tant que

Fin

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

Dans un conteneur, assimilé à un pavé droit, on place quatre bobines de câble (assimilées à des cylindres) : deux grosses et deux petites.
Les deux grosses bobines ont un rayon de deux mètres, les deux petites ont un rayon d'un mètre.
Afin d'utiliser au mieux le conteneur, on cherche à obtenir la configuration suivante :
Les deux petites bobines se touchent et touchent chacune une paroi verticale du conteneur.
Chacune des grosses bobines touche les deux petites, ainsi que trois parois verticales du conteneur.
On considère une vue en coupe du conteneur et des quatre bobines, dans un plan horizontal, et l'on se trouve ramené au problème suivant :

Un rectangle ABCD contient quatre cercles C_1, C_2, C_3 et C_4 .

On note O_1 le centre de C_1 et O_2 le centre de C_2 .

C_1 et C_2 ont pour rayon 2. C_3 et C_4 ont pour rayon 1.

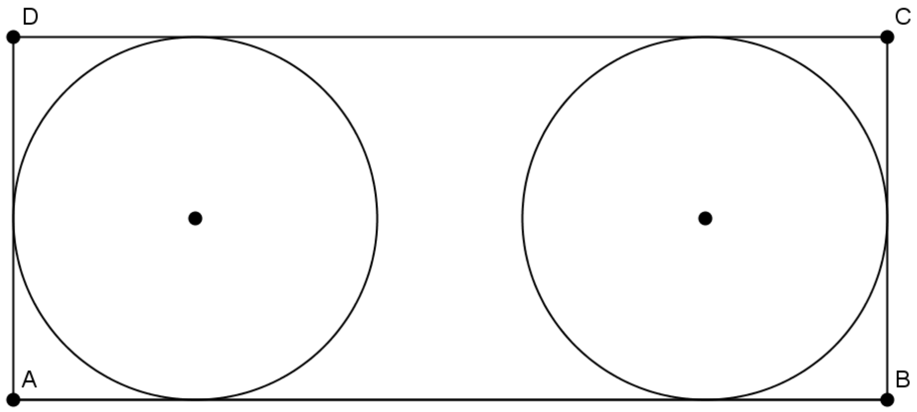
C_1 est tangent à [AB], [AD], [CD], C_3 et C_4 .

C_2 est tangent à [AB], [BC], [CD], C_3 et C_4 .

C_3 est tangent à [AB] et C_4 est tangent à [CD].

C_3 et C_4 sont tangents à $[\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2]$ en O, centre de ABCD.

Les cercles C_1 et C_2 sont représentés sur l'esquisse ci-dessous



N.B. : Les proportions de l'esquisse ne sont pas exactes, mais sont suffisamment précises pour permettre un tracé approximatif de C_3 et C_4

1. Calculer la distance $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$.

2. Calculer le rapport $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$.

3. On note E le point où C_1 est tangent à [CD] et F le point où C_1 est tangent à C_4 .
Montrer que E, F et O sont alignés.

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Quelles sont les dimensions du rectangle ci-dessous sachant qu'il a été découpé en trois morceaux de même aire.