OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

MERCREDI 11 MARS 2009 (14h – 18h)

SUJET PREMIERE STI / STL

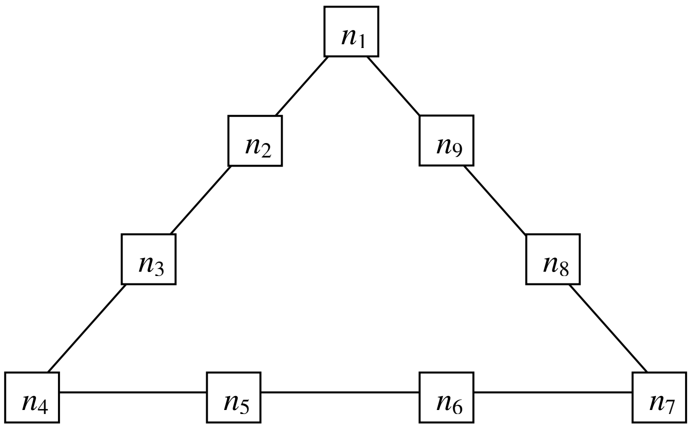
Exercice 1 :

Partie A : Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle est la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

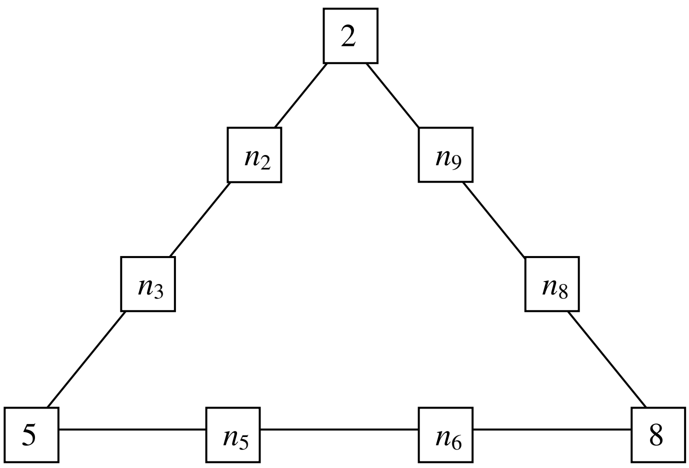


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

(C'est-à-dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \;=\; n_4 + n_5 + n_6 + n_7 \;=\; n_7 + n_8 + n_9 + n_1 \;=\; S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
  a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
  b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$.
  c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
  b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2 :

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.
<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- A partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3}+\sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}$.

1- A l'aide de votre calculatrice, étudier le comportement de f sur l'intervalle $I_1=[5;10]$.
Quelle conjecture vous suggère cette méthode ?

2- Démontrer cette conjecture (on pourra poser $x=u^2+1$, avec $u\geq 0$).

3- Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles $I_2=[1;5]$ et $I_3=[10;+\infty[$.

Exercice 4 :

Dans la figure suivante, le triangle ABC est tel que les médianes (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.
Exprimer $\mathrm{CA}^2+\mathrm{CB}^2$ en fonction de AB^2.