

Les Deux Exercices communs des Olympiades 2004

Exercice I

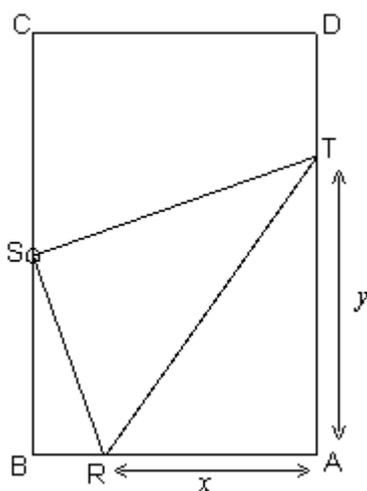
On définit pour chaque couple de réels (a, b) la fonction f par :

$$f(x) = a - \sqrt{x + b}$$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a, b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables
2. Peut-on en dire autant de 4 et 7?
3. A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables?

Exercice II



Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$.

Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille).

On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille).

Voir figure

Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$ et $AT = y$.

- 1: Trouver les valeurs minimale et maximales de x .
- 2: Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
- 3: Trouver la valeur x pour laquelle l'aire de la partie pliée (triangle SRT) est minimale.
- 4: Quelle est alors la nature du triangle AST ?