ACADÉMIE D'AMIENS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Académie d'Amiens

Mercredi 20 mars 2024 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h) :

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents. Il est rappelé que cette deuxième partie (et celle-ci seulement) peut se dérouler en équipe, mixte si possible. Une seule copie par équipe sera alors rédigée. Dans ce cas, tous les noms et prénoms de tous les membres de l'équipe doivent être indiqués sur la copie.

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques doivent traiter uniquement les exercices académiques 1 et 2.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter uniquement les exercices académiques 1 et 3.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Il est conseillé aux candidats ou équipes de candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat ou l'équipe repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il, elle l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il, elle a été amené-e à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 7 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

MATHEMATIQUES BABYLONIENNES

Le système de numération que nous utilisons aujourd'hui pour écrire les nombres est un système décimal. Il utilise la base 10 ainsi que 10 symboles appelés chiffres : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Par exemple :

$17\,043$ a pour valeur $1 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 10\,000 + 7\,000 + 0 + 40 + 3$

Il y a 4 000 ans, les habitants de la Mésopotamie (Babyloniens), écrivaient sur des tablettes d'argile fraîche qu'ils laissaient ensuite sécher au soleil. Elles se sont souvent très bien conservées, c'est pourquoi on connaît des textes très anciens de ces peuples.

Un certain nombre de tablettes contient des mathématiques. Les nombres y sont écrits en base 60 (ce système est appelé sexagésimal), avec les deux seuls symboles : un « clou » pour une unité et un « chevron » pour une dizaine :

$1 =$  et $10 =$ 

Par exemple, le nombre qu'ils écrivaient :  se lit « 15 2 34 » dans le système sexagésimal

et vaut dans notre système décimal : $15 \times 60^2 + 2 \times 60^1 + 34 \times 60^0 = 15 \times 3\,600 + 2 \times 60 + 34 \times 1 = 54\,154$.

Partie I : Généralités

1. Que vaut le nombre  dans le système décimal ?

2. On donne les égalités suivantes : 7 321= 2×3 600 + 121 et 121 = 2× 60 + 1.
   En déduire l'écriture de 7 321 dans le système sexagésimal des babyloniens en utilisant clous et chevrons.

3. Par abus de langage un nombre écrit dans le système décimal sera appelé « nombre décimal ».
   Écrire les nombres décimaux $24\,015$ et $156\,092$ dans le système sexagésimal des babyloniens en utilisant clous et chevrons.

4. **a.** Quels problèmes rencontre-t-on pour écrire le nombre décimal 36 000, le nombre décimal 3 601 ?
   b. Que manquait-il au système sexagésimal babylonien ?

Pour éviter toute confusion, on écrira désormais le nombre babylonien 
sous la forme « 15.2.34 »

Le nombre décimal 36 000 sera ainsi écrit 10.0.0 et le nombre décimal 3 601 sera écrit 1.0.1 en système sexagésimal.

Partie II : Inverse au sens babylonien

Soit n un entier naturel. On dit que « m est un inverse de n au sens babylonien » si $m \times n$ est une puissance de 60.

Par exemple, 3 est un inverse de 20 au sens babylonien car $3 \times 20 = 60 = 60^1$.

De même, 36 est un inverse de 100 au sens babylonien car $36 \times 100 = 3600 = 60^2$.

On dira que $(3\,;20)$ et $(36\,;100)$ sont des couples d'inverses au sens babylonien.

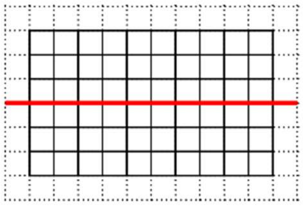
1. Si un nombre possède un inverse au sens babylonien, cet inverse est-il unique ? Justifier.

2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 60 et en déduire quatre autres couples d'inverses au sens babyloniens.
3. Montrer que $2.13.20$ est un inverse de 27 au sens babylonien.
4. **a.** Montrer que 1 est son propre inverse au sens babylonien.
   b. Existe-t-il d'autres entiers qui sont leur propre inverse ? Justifier.
5. Montrer que 7 ne possède pas d'inverse au sens babylonien.
6. Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier n admette un inverse au sens babylonien.
7. **a.** Déduire de la question précédente que $1.41.15$ admet un inverse au sens babylonien.
   b. Déterminer le plus petit d'entre eux dans le système sexagésimal.

Exercice 2 (candidats de la voie générale qui suivent l'enseignement de spécialité)

LES SOLDATS DE CONWAY

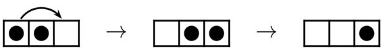
On considère une grille infinie composée de cases carrées partagée par une ligne horizontale dite « de front » (infinie aussi), comme sur la figure ci-contre.



On dispose sous la ligne de front un nombre fini de pions (les soldats), un par case : c'est la configuration initiale.

L'objectif est d'amener un soldat au-dessus de la ligne de front, dans une case la plus éloignée possible de cette ligne.

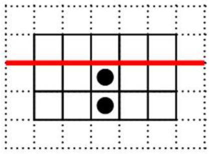
Pour ce faire, un seul mouvement est autorisé : pour évoluer, un pion doit être placé à côté d'une case adjacente occupée (deux cases sont adjacentes si elles partagent un côté), elle-même suivie dans la même direction d'une case vide. Le pion peut alors sauter la case non vide et prendre place dans la case disponible. Le pion enjambé est ensuite retiré de la grille :



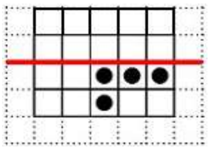
Dans la suite du sujet, les parties I et II sont indépendantes.

Partie I : Des exemples

1.
   a. Justifier que la configuration initiale ci-contre permet à un soldat d'atteindre une case de la première rangée au-dessus de la ligne de front.



   b. Montrer que la configuration initiale ci-contre permet à un soldat d'atteindre une case de la deuxième rangée au-dessus de la ligne de front.



2. Justifier que quelle que soit la configuration initiale choisie, il n'y a plus de mouvement possible au bout d'un certain nombre d'étapes.
3. Proposer une configuration initiale permettant d'atteindre une case de la troisième rangée au-dessus de la ligne de front.

Partie II : Une question de poids

1. Montrer qu'il existe un unique réel $q \in]0;1[$ tel que $1 = q + q^2$.
2. On rappelle l'identité valable pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

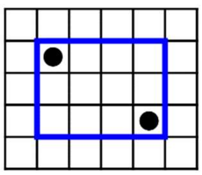
   où l'on somme les puissances successives du réel q, où q est le réel déterminé à la question 1.

   Soient m et p deux entiers naturels.

   Montrer que :
   $q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots + q^{m+p} = q^{m-2} \times (1 - q^{p+1})$, avec q le réel déterminé à la question 1.

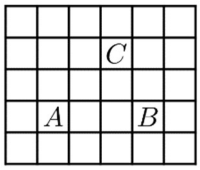
3. Deux pions déterminent un unique rectangle composé de cases dont ils occupent celles situées à des sommets opposés du rectangle, comme sur la figure ci-contre.

   On définit la distance entre deux pions comme l'entier naturel $h + v - 2$ où h et v sont respectivement le nombre de cases sur le côté horizontal et vertical du rectangle associé aux deux pions.



Dans l'exemple précédent, le côté horizontal du rectangle compte 4 cases, donc $h = 4$, et le côté vertical, 3 cases, donc $v = 3$. Ainsi, la distance entre ces deux pions vaut $h + v - 2 = 4 + 3 - 2 = 5$.

Calculer les trois distances entre les pions dont les positions sont repérées par les lettres A, B et C dans la configuration ci-contre.

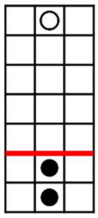


4. On fixe dans la grille un pion positionné dans la cinquième rangée au-dessus de la ligne de front. Ce pion sera dénommé « pion objectif » et représenté par un disque vide dans la suite.

Pour une configuration de pions donnée, on attribue à chaque pion un poids défini par le réel q^d où d est la distance du pion au pion objectif. En cohérence avec les définitions, le poids du pion objectif est 1.

Enfin, on attribue à chaque configuration de pions un poids défini par la somme des poids des pions qui la composent.

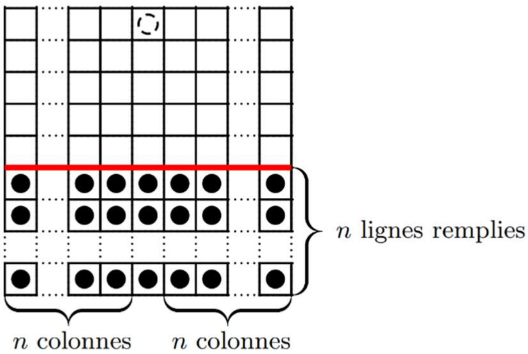
- **a.** Justifier que toute configuration de pions contenant le pion objectif aura un poids supérieur ou égal à 1.
- **b.** Montrer que la configuration de pions ci-contre a un poids de $1 + q^4$, où q est le réel défini à la question **1**. *On rappelle que pour ce réel q,* $1 = q + q^2$.

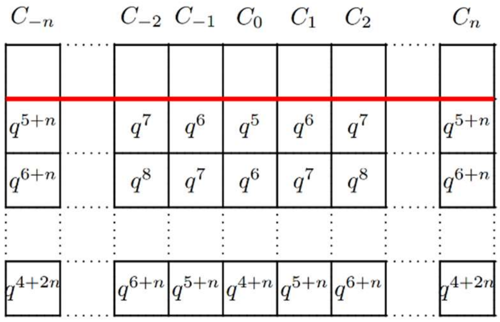


Partie III : L'inaccessible cinquième ligne

Dans la suite du sujet, nous allons démontrer qu'il n'existe aucune configuration initiale permettant d'atteindre une case de la cinquième ligne.

1. Justifier que quelle que soit la configuration initiale, il existe un entier naturel n tel que le poids de celle-ci soit inférieur ou égal à celui de la configuration ci-dessous (où le pion objectif -- en pointillés -- ne sert ici que de repère visuel et ne fait pas partie de la configuration).





2. Dans la grille ci-contre, on indique pour la configuration de la question précédente le poids de chaque pion inscrit en lieu et place de celui-ci. On définit de plus un nom pour chaque colonne.

- **a.** Calculer le poids total de la colonne C_0.
- **b.** Montrer que le poids total des colonnes C_1 à C_n est $q^2(1 - q^n)^2$.
- **c.** Montrer que le poids total de la configuration est $(1 - q^n)(1 - 2q^{n+2})$.
- **d.** En déduire que toute configuration initiale a un poids strictement inférieur à 1.

3. Soit n un entier naturel non nul, et soient deux cases adjacentes occupées par des pions de poids q^n et q^{n+1}. Montrer que tout mouvement de l'un de ces deux pions par rapport à l'autre ne peut pas augmenter le poids de la configuration.

4. Conclure que quelle que soit la configuration initiale, il est impossible d'atteindre une case de la cinquième rangée au-dessus de la ligne de front.

Exercice 3 (candidats de la voie technologique et candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

PERMUTATIONS

On appelle **permutation sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$ des entiers de 1 à n**, une façon de « mélanger » des nombres compris entre 1 et n.

Par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

On dira que :
1 est envoyé en 3 ; 2 est envoyé en 5 ;
3 est envoyé en 2 ; 4 est inchangé ;
5 est envoyé en 1.

De façon plus mathématique, à chaque valeur entière comprise entre 1 et 5, on associe une unique image elle aussi entière et comprise entre 1 et 5 (toutes les images devant être différentes).

Elle est notée :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on « mélange » des valeurs comprises entre 1 et 5, on dit que cette permutation est de degré 5.

Il existe une permutation de degré 5 particulière qui laisse inchangées toutes les valeurs ; elle se note :

$$id_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Etude de quelques exemples de permutations

1. Donner la notation de la permutation de degré 4 pour laquelle la valeur 1 « est envoyée » en 3, la valeur 2 reste inchangée, la valeur 3 « est envoyée » en 4 et la valeur 4 « est envoyée » en 1.
2. Donner la liste des 6 permutations de degré 3.
3. Combien existe-t-il de permutations de degré 4 ? *La réponse doit être justifiée mais il n'est pas demandé de faire la liste de toutes ces permutations.*

Partie II : Produit de permutations

On note : $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Le produit de P_1 et P_2, que l'on note $P_1 * P_2$, consiste à **appliquer la permutation P_2 suivie de la permutation P_1.**

On a donc ici :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

« a pour image » …. par la permutation P_2

« a pour image » …. par la permutation P_1

On a donc :

$$P_1 * P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Soient A et B deux permutations de degré 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b. A-t-on $A * B = B * A$?

c. Peut-on trouver 2 permutations de degré 4 <u>distinctes</u> A_1 et A_2 telles que $A_1 * A_2 = A_2 * A_1$?

2. On note $id_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

On admet que pour toute permutation A (ici de degré 4) il existe une unique permutation, notée A^{-1} telle que $A^{-1} * A = id_4$.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b. A-t-on $A * A^{-1} = id_4$?

c. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer B^{-1}.

d. Montrer que, pour toute permutation A de degré 4, on a : $A * A^{-1} = A^{-1} * A$.

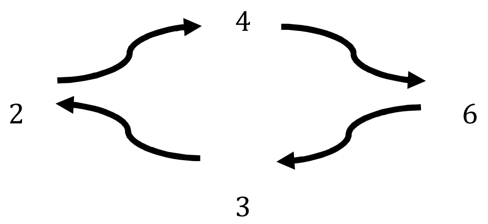
Partie III : Permutations et cycles

Observons la permutation de degré 6 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Par cette permutation, les valeurs 1 et 5 restent inchangées.

La valeur 2 a pour image 4, qui a pour image 6, qui a pour image 3, qui a pour image 2.



Dans cette permutation, 4 valeurs sont « échangées » de façon cyclique, on appelle donc cette permutation **un cycle.**

On le note $C = (2\,,4\,,6\,,3)$.
Les valeurs 1 et 5 n'apparaissent pas, ce qui sous-entend qu'elles restent inchangées.

1. Donner la notation sous forme d'un cycle de chacune des permutations suivantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. En réutilisant le produit défini dans la partie **II**, déterminer :

a. $(1\,,3\,,4) * (1\,,2\,,5)$

b. $(1\,,3\,,5)^2 = (1\,,3\,,5) * (1\,,3\,,5)$

c. $(1\,,3\,,2\,,5)^{-1}$

3. Soit n un entier naturel non nul.
On note $P^n = \underbrace{P * P * P * \ldots * P}_{n \text{ fois}}$. On suppose ici $P \neq id$.

On admet que si P est un cycle alors il existe un entier naturel k non nul tel que $P^k = id$.
On appelle ordre du cycle, le plus petit entier k vérifiant cette égalité.

a. Montrer que l'ordre d'un cycle de 2 éléments vaut 2.
b. Déterminer l'ordre d'un cycle de 3 éléments (*justifier précisément la réponse*).