MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2024

Métropole – La Réunion – Mayotte

Europe – Afrique – Orient

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices nationaux (2 heures).

- **Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité** de mathématiques (« spé Maths »), et uniquement ceux-là, doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

- **Tous les autres candidats**, c'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.), doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Chaque candidat traite ainsi deux exercices nationaux. Selon sa catégorie, l'exercice 1 et l'exercice 2, ou bien l'exercice 1 et l'exercice 3. Il n'est pas nécessaire de résoudre toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note ou une appréciation maximales.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder une heure à un premier exercice, puis de passer à son deuxième quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

<u>**Les énoncés doivent être rendus**</u> au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé national comporte 6 pages.

Exercice 1 (tous les candidats)

Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes. À partir de la **7**., certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

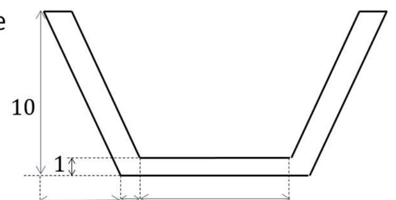
1. *Pourcentages pour tous les âges.*
a. Est-il exact que pour tous nombres réels positifs x et y, x % de y euros valent y % de x euros ? En déduire sans calcul compliqué ce que valent 32 % de 25 euros.
b. Est-il exact que, pendant les soldes, après 4 baisses consécutives de 25 %, un article devient gratuit ?
c. On passe d'un prix HT (hors taxe) à un prix TTC (toutes taxes comprises) en augmentant le prix HT de 20 %. Si le prix TTC d'un article est 2 fois plus élevé dans un magasin que dans un autre, le prix HT l'est-il aussi ?

2. *Double sens.* Donner deux reformulations très différentes à la question « Quel nombre donne 51 quand on le multiplie par $0{,}01$? » pour en lever l'ambiguïté, et apporter les deux réponses très différentes possibles.

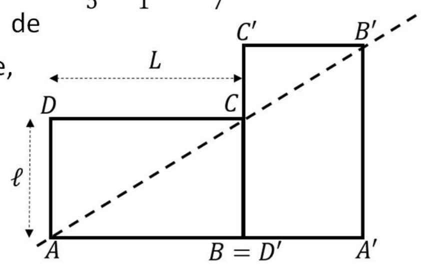
3. *Le secret pour avoir* $20/20$. Un sujet d'examen, noté sur 20, comprend un exercice noté sur 5 et un problème, noté sur 15. Un candidat reçoit la note de 4 sur 5 à l'exercice et de 3 sur 15 au problème. Quelle est sa note sur 20 ? Pourtant, le calcul fractionnaire démontre que $\frac{4}{5}+\frac{3}{15}=\frac{20}{20}$ (résultat à justifier). Avancez une raison à ce paradoxe et démontrer, dans le même contexte d'un exercice sur 5 et d'un problème sur 15, que le second calcul donne toujours un meilleur résultat que le premier.

4. *Trouver l'intrus.* On dispose d'une balance à deux plateaux comme sur la figure ci-contre. Soient 5 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 4 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 2 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde. Soient maintenant $2\,024$ oranges indiscernables au toucher et à la vue ; $2\,023$ ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 10 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde.

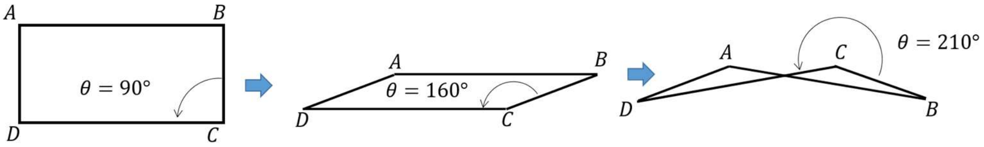
5. *Tchin !* Un verre est représenté en coupe méridienne (unité en cm ; la figure n'est pas à l'échelle ; les parois intérieures et extérieures sont parallèles). On y empile un second verre, du même modèle. À quelle hauteur s'élève l'ensemble ? On accompagnera sa rédaction d'un croquis.

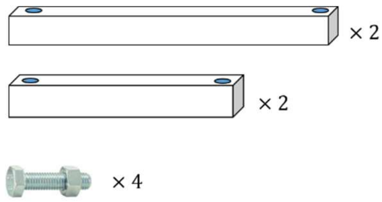


6. *Le début de la richesse.* Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ identiques de largeur ℓ et de longueur $L>\ell$ sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre, où le premier est posé horizontalement et le second dressé verticalement.
Montrer que les points ACB' sont alignés quand $\frac{L}{\ell}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(Après l'épreuve, essayez avec deux rectangles au format CB (« carte bleue »), vous verrez, cela fonctionne !)

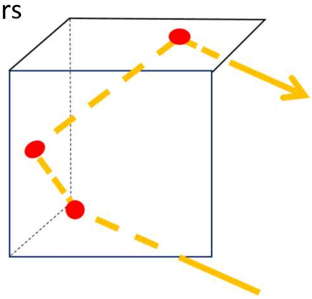


7. *Quelle forme !?* Un rectangle $ABCD$ est articulé en ses quatre sommets. Il peut donc se déformer en parallélogramme, puis en contre-parallélogramme en jouant sur l'ouverture $\theta = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ comme ci-dessous. Dessiner les configurations obtenues quand les angles mesurent successivement $\theta = 120°$, puis $\theta = 180°$ puis $\theta = 225°$. On laissera apparents les traits de construction et on choisira DC trois fois plus grand que AD. On dispose ensuite de quatre barrettes parallélépipédiques (percées en leurs extrémités) : deux longues et deux courtes (trois fois plus petites que les longues), et de quatre boulons (un boulon est composé d'une vis et d'un écrou). Dessiner en perspective les assemblages possibles vous permettant de fabriquer un parallélogramme articulé avec ces fournitures. Cependant, quel est le seul assemblage laissant le mécanisme se déformer jusqu'au contre-parallélogramme ?

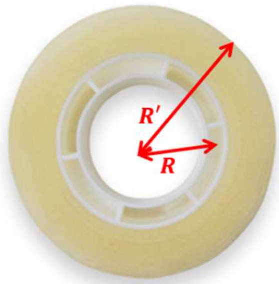




8. *Rien que pour vos yeux.* Un coin de cube est constitué de trois miroirs perpendiculaires. En général, un rayon incident qui vient frapper l'un des miroirs est ensuite réfléchi sur les deux autres avant de repartir. Par exemple, sur le dessin en regard, le rayon lumineux rebondit trois fois : il frappe d'abord la face avant, puis la face latérale gauche, puis la face supérieure. Expliquer pourquoi le rayon qui repart est alors parallèle au rayon qui arrivait. En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour fabriquer les catadioptres situés à l'arrière des bicyclettes et des automobiles.



9. Un rouleau de bande adhésive a pour rayon intérieur $R = 1{,}8$ cm et pour rayon extérieur $R' = 2{,}6$ cm. La bande adhésive mesure 25 m de long. Déterminer le plus précisément possible son épaisseur.



10. Un tableau de n lignes et p colonnes contient des nombres réels. On réarrange chaque ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant, puis chaque colonne de bas en haut dans l'ordre croissant comme sur l'exemple ci-contre (où $n = 3$ et $p = 5$). Démontrer qu'à l'issue de cette seconde opération chaque ligne demeure bien classée, toujours dans l'ordre croissant de gauche à droite donc.

1	**8**	**3**	**4**	**8**
0	**9**	**2**	**7**	**14**
20	**3**	**7**	**7**	**7**

1	**3**	**4**	**8**	**8**
0	**2**	**7**	**9**	**14**
3	**7**	**7**	**7**	**20**

3	**7**	**7**	**9**	**20**
1	**3**	**7**	**8**	**14**
0	**2**	**4**	**7**	**8**

Exercice 2 (candidats de la voie générale suivant la « spé maths »)

Nous sommes toutes distinctes

Dans cet exercice, le symbole n désigne un entier naturel, avec $n \geq 1$; tous les ensembles considérés sont non vides, finis et constitués de nombres réels distincts ; de plus on conviendra d'écrire tout ensemble fini $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ à n éléments réels distincts en ordonnant toujours a_1, a_2, $\cdots$, a_n si bien que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Étant donné un tel ensemble, on note $S(A)$ la somme de ses éléments, soit :

$$S(A) = a_1 + \cdots + a_n$$

En particulier, lorsque $n = 1$ et donc $A = \{a_1\}$ est un singleton, $S(A) = a_1$.

On dit que l'ensemble A est *à sommes toutes distinctes* (en abrégé que A est STD) quand, pour toutes parties non vides distinctes Y et Z de A, $S(Y) \neq S(Z)$. Cela revient à demander aux $2^n - 1$ sommes que l'on peut former avec des éléments de A d'être toutes distinctes.

Par exemple $A = \{1,2,5\}$ est STD parce que les nombres 1, 2, 5, $1 + 2 = 3$, $2 + 5 = 7$, $1 + 5 = 6$, $1 + 2 + 5 = 8$ sont tous distincts. En revanche, $A = \{2,4,6,7\}$ n'est pas STD parce qu'en prenant $Y = \{2,4,7\}$ et $Z = \{6,7\}$, on a $S(Y) = 2 + 4 + 7 = 13 = S(Z)$, bien que $Y \neq Z$.

Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples

1. Expliquer pourquoi le nombre de sommes à envisager pour étudier le caractère STD de A vaut $2^n - 1$.

2. Montrer que l'ensemble $\{1,3,5\}$ est STD mais que l'ensemble $\{4,6,7,9\}$ ne l'est pas.

3. Quel(s) ensemble(s) A contenant 0 est (sont) STD ?

4. Soient A et B deux ensembles non vides et finis de réels distincts, avec $A \subset B$ (c'est-à-dire que A est un sous-ensemble de B).

a. Si B est STD ; justifier que A l'est aussi.

b. L'ensemble B peut-il être STD si A ne l'est pas ?

5. Soit A un ensemble non vide et fini de réels distincts. On suppose que A n'est constitué que de nombres entiers et qu'il est STD. Justifier que $A \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ puis que $A \cup \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\}$ sont aussi STD.

Partie 2 : Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \cdots + u_n + 1$$

6. Vérifier que $u_2 = 2$ et $u_3 = 4$. Calculer u_5.

7. Rédiger sur votre copie un programme en langage Python qui renverrait u_{100} (qu'on ne calculera pas).

8. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est STD.

10. Montrer que (u_n) est en fait une suite géométrique que l'on déterminera.

Partie 3 : Suites STD

Une *suite* (u_n) est *dite* STD lorsqu'elle est strictement croissante, qu'elle est composée d'entiers strictement positifs, et que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est STD. Par exemple, la suite étudiée en **partie 2** est une suite STD.

11. Soit (u_n) une suite STD quelconque.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$$

b. En déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \geq \frac{2^n}{n}$$

12. Le but cette question est d'affiner la minoration obtenue à la question précédente. Pour ce faire, nous aurons recours aux probabilités, et nous dirons qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble réel fini non vide $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ à n éléments distincts suit une loi uniforme quand toutes les valeurs qu'elle peut atteindre sont équiprobables. Ainsi,

$$P(X = a_1) = P(X = a_2) = \cdots = P(X = a_n) = \frac{1}{n}$$

a. Soit (u_n) une suite STD quelconque. Pour $n \geq 2$ on considère les variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent la loi uniforme sur la paire $\{-1,1\}$: ainsi, pour chacun des indices i, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X = u_1 X_1 + \cdots + u_n X_n$. On admet que $E(X) = u_1 E(X_1) + \cdots + u_n E(X_n)$ et que $V(X) = u_1^2 V(X_1) + \ldots + u_n^2 V(X_n)$. Après avoir justifié que $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = 1$, calculer l'espérance $E(X)$ et exprimer la variance $V(X)$ en fonction de $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

b. Montrer que X suit une loi uniforme sur un ensemble de 2^n entiers relatifs, symétrique par rapport à 0, et dont les éléments sont non nuls et de la même parité.

c. En déduire que pour $n \geq 1$

$$u_n{}^2 \geq \frac{1}{n\,2^{n-1}}\left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2^n - 1)^2\right)$$

d. Proposer une valeur de $n \geq 2$ pour laquelle cette inégalité fournit un minorant plus grand qu'en **11.*b***.

Exercice 3 (candidats de la voie générale NE suivant PAS l'enseignement « spé maths » et TOUS les candidats de la voie technologique)

Pyramides de Pascal

1. *Question préliminaire.* Rappeler pourquoi la somme $1 + 2 + \cdots + n$ des n premiers entiers non nuls, avec $n \geq 1$, est égale à $n(n+1)/2$.

Une *pyramide de Pascal* est un tableau triangulaire composé d'entiers naturels et formé de la manière suivante : sa ligne du haut contient un nombre, la suivante deux nombres, etc. De plus, sur toutes les lignes sauf la dernière (celle du bas), chaque nombre doit être égal à la distance entre les deux nombres situés juste en dessous, l'un à sa gauche et l'autre à sa droite.

Ci-dessous est représentée, en quelques étapes, la construction d'un tel triangle ayant 4 lignes :

_		_		1
_ _	→	_ _	… →	2 3
_ _ _		4 6 3		4 6 3
8 4 10 7		8 4 10 7		8 4 10 7

2. *Quelques exemples*

a. Construire la pyramide de Pascal à 4 lignes dont la dernière ligne est constituée, dans cet ordre d'exposition, des nombres entiers : 4, 3, 9 et 7 (4 est donc tout à gauche et 7 tout à droite).

b. Construire une pyramide de Pascal à 3 lignes en utilisant exclusivement les nombres entiers 1, 2, 3.

3. *Nombre d'entiers dans une pyramide de Pascal*
a. Combien de nombres (distincts ou pas) sont écrits dans une pyramide de Pascal à 3 lignes ? à 4 lignes ?
b. Soit $n \geq 2$. Combien de nombres (distincts ou pas) sont écrits dans une pyramide de Pascal à n lignes ?

Dans la suite, on dira qu'une pyramide de Pascal est *parfaite* si elle contient exactement une fois tous les entiers entre 1 et le nombre total d'entiers du triangle. Par exemple, cette pyramide de Pascal à 3 lignes est parfaite :

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & 3 & & 5 & \\ 4 & & 1 & & 6 \end{array}$$

4. Soit $n \geq 2$. Montrer que s'il existe une pyramide parfaite à n lignes, alors le plus grand entier qu'elle possède est situé sur la ligne du bas. Quel est cet entier ?

5. Construire une pyramide de Pascal parfaite à 3 lignes dont le nombre 6 est situé en bas et au milieu.

6. L'objet de cette question est de montrer que dans une pyramide de Pascal parfaite à n lignes, et sauf à avoir $n \leq 3$, le nombre $n(n+1)/2$ ne peut être situé ni en bas tout à droite, ni en bas tout à gauche.
a. Justifier qu'il suffit d'établir qu'il ne peut être situé en bas tout à droite.

On suppose dans la suite que le nombre $n(n+1)/2$ est situé en bas tout à droite.

b. On considère alors le chemin qui part du sommet de la pyramide et qui descend progressivement, en connectant le nombre atteint sur chaque ligne au plus grand des deux nombres de la ligne du dessous situés à sa gauche et à sa droite. Dans l'exemple en amont de la question **4** ce chemin serait $2 \to 5 \to 6$. Montrer que, dans le cas général, ce chemin ne peut emprunter que le bord droit de la pyramide et aboutir à $n(n+1)/2$.
c. Conclure en envisageant le triangle équilatéral dont la base du dessous est composée des $n-2$ nombres les plus à gauche de la dernière ligne.