ACADÉMIE D'AMIENS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 9 mars 2022 de 08h00 à 12h10

Pause de 10h00 à 10h10

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Trois multiplications à l'étude

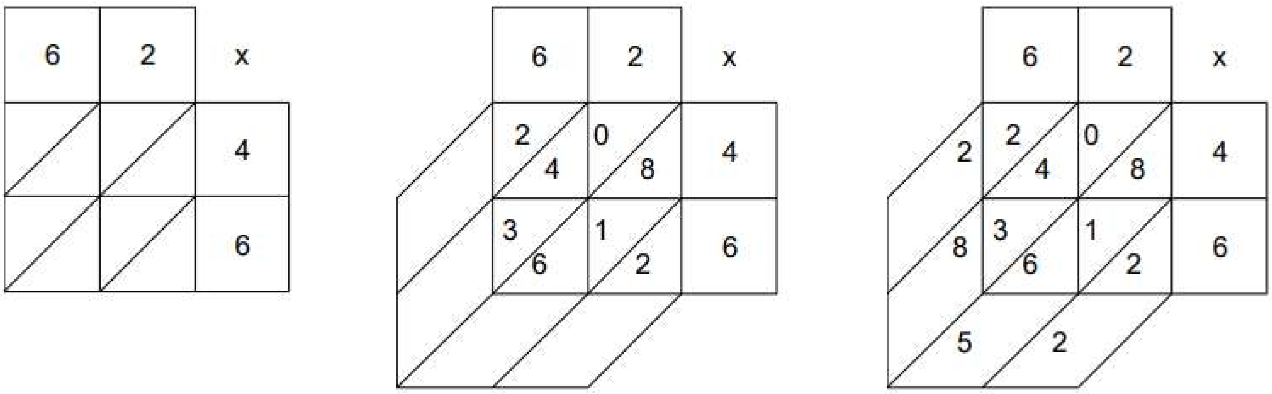
Cet exercice présente plusieurs méthodes pour poser la multiplication de deux entiers naturels et s'intéresse au nombre d'opérations élémentaires qu'elle nécessite pour obtenir le résultat.
Nous définirons comme étant une opération élémentaire :

- toute multiplication de deux chiffres ;
- toute somme de termes (éventuellement nuls pour certains d'entre eux).

Partie I : Multiplication per gelosia (par jalousies)
Pour effectuer la multiplication per gelosia de deux entiers strictement compris entre 9 et 100, on présente les calculs dans un tableau à double entrée dont les cases internes sont séparées en deux par des diagonales :

- les deux nombres que l'on veut multiplier sont placés dans les parties du haut et de droite, un chiffre par case ;
- on complète chaque case du tableau en y mettant le produit des chiffres situés dans la même ligne et la même colonne, en écrivant le chiffre des unités du résultat sous la diagonale et le chiffre des dizaines au-dessus (éventuellement zéro) ;
- on ajoute ensuite les nombres situés dans une même diagonale en commençant par celle située en bas à droite du tableau et on indique le résultat obtenu dans la case de cette diagonale extérieure au tableau. Dans le cas où la somme obtenue est supérieure ou égale à 10, on note uniquement le chiffre des unités comme résultat et on ajoute le chiffre des dizaines (retenue) aux nombres de la diagonale suivante (située juste à gauche) ;
- on lit le résultat de la multiplication per gelosia dans les cases extérieures du tableau, en allant de celle en haut à gauche vers celle en bas à droite.

Par exemple, la multiplication per gelosia de 62 par 46 s'illustre par les schémas suivants :



On lit le résultat dans les cases à l'extérieur du tableau : 2 milliers augmentés de 8 centaines, de 5 dizaines et de 2 unités, soit 2852.
Dans cet exemple, on effectue les 8 opérations élémentaires suivantes afin d'obtenir le produit de 62 par 46 : 4×6 ; 4×2 ; 6×6 ; 6×2 ; $2 + 0$; $8 + 1 + 6$; $0 + 4 + 3 + 1$; $2 + 0$.

1. Poser la multiplication per gelosia de 86 par 79 et indiquer les opérations élémentaires effectuées pour obtenir le résultat.
2. Soient a et b deux entiers strictement compris entre 9 et 100.
   Expliquer pourquoi, quels que soient a et b, on effectue toujours 8 opérations élémentaires lorsque l'on pose la multiplication per gelosia de a par b.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   On effectue la multiplication per gelosia de deux nombres à n chiffres (en la présentant dans un tableau à double entrée à n lignes et n colonnes).
   Déterminer, en fonction de n, le nombres d'opérations élémentaires que l'on devra effectuer.

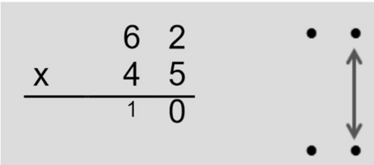
Partie II : Multiplication posée à l'indienne

On présente dans cette partie la multiplication posée à l'indienne **uniquement dans le cas de deux entiers naturels strictement compris entre 9 et 100.**

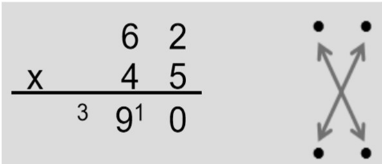
Pour poser la multiplication à l'indienne de deux tels nombres :

- on multiplie les chiffres des unités entre eux ;
- on effectue la somme des produits du chiffre des dizaines de chaque nombre par le chiffre des unités de l'autre ;
- on multiplie les chiffres des dizaines entre eux.

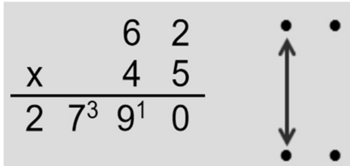
Par exemple, la multiplication posée à l'indienne de 62 par 45 s'illustre par les schémas suivants :



$5 \times 2 = 10$, d'où 0 pour les unités et 1 en retenue.



$5 \times 6 + 4 \times 2 = 38$, résultat auquel on ajoute la retenue.
D'où 9 pour les dizaines et 3 en retenue.



$4 \times 6 = 24$, résultat auquel on ajoute la retenue.
D'où 27 pour les centaines.

Le résultat est alors de 0 unité, augmenté de 9 dizaines et de 27 centaines, soit 2790.

Dans cet exemple, on effectue les 6 opérations élémentaires suivantes afin d'obtenir le produit de 62 par 45 :

$$2 \times 5\ ;\ 5 \times 6\ ;\ 4 \times 2\ ;\ 30 + 8 + 1\ ;\ 4 \times 6\ ;\ 24 + 3.$$

1. Poser la multiplication à l'indienne de 47 par 28 et indiquer les opérations élémentaires effectuées pour obtenir le résultat.
2. On considère la proposition suivante : « Pour tous entiers naturels n et m strictement compris entre 9 et 100, on effectue le même nombre d'opérations élémentaires lorsque l'on pose la multiplication à l'indienne de n par m et lorsque l'on pose la multiplication à l'indienne de m par n ».
Montrer que cette proposition est vraie.
3. Soient a et b deux entiers strictement compris entre 9 et 100.
On appelle $MINi(2)$ le nombre minimal et $MAXi(2)$ le nombre maximal d'opérations élémentaires à effectuer lorsque l'on pose la multiplication à l'indienne de a par b.
Déterminer $MINi(2)$ et $MAXi(2)$.

Partie III : Multiplication posée à la française

On dira qu'une multiplication est posée à la française lorsqu'elle est présentée de la façon la plus communément enseignée en France.

Pour rappel, si on effectue par exemple la multiplication posée à la française de 241 par 123, on présente les calculs ainsi :

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 2 & 4 & 1 \\
 & & \times & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & & & 7 & 2 & 3 \\
+ & & 4 & 8 & 2 & 0 \\
+ & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 9 & 6 & 4 & 3
\end{array}$$

Dans cet exemple, on effectue les 15 opérations élémentaires suivantes afin d'obtenir le produit de 241 par 123 :

$3 \times 1\ ;\ 3 \times 4\ ;\ 3 \times 2\ ;\ 6 + 1\ ;\ 2 \times 1\ ;\ 2 \times 4\ ;\ 2 \times 2\ ;\ 1 \times 1\ ;\ 1 \times 4\ ;\ 1 \times 2\ ;\ 3 + 0 + 0\ ;\ 2 + 2 + 0\ ;$
$7 + 8 + 1\ ;\ 1 + 0 + 4 + 4\ ;\ 0 + 0 + 2.$

1. On a posé ci-dessous la multiplication de 62 par 45 :

$$\begin{array}{r} 6\,2 \\ \underline{\times \quad 4\,5} \\ 3\,1\,0 \\ \underline{+ \quad 2\,4\,8\,0} \\ 2\,7\,9\,0 \end{array}$$

Quelles sont les 9 opérations élémentaires effectuées pour obtenir le résultat ?

2. Poser la multiplication à la française de 47 par 28 et indiquer les 9 opérations élémentaires effectuées pour obtenir le résultat.

3. On considère la proposition suivante : « Pour tous entiers naturels n et m, on effectue le même nombre d'opérations élémentaires lorsque l'on pose la multiplication à la française de n par m et lorsque l'on pose la multiplication à la française de m par n ».
Montrer que cette proposition est fausse.

4. Soit n un entier naturel non nul.
On appelle $MINf(n)$, le nombre minimal d'opérations élémentaires à effectuer lorsque l'on pose la multiplication à la française de deux nombres à n chiffres. Ainsi, $MINf(2)$ est le nombre minimal d'opérations élémentaires à effectuer lorsque l'on pose la multiplication à la française de deux nombres à 2 chiffres.
On appelle $MAXf(n)$ le nombre maximal d'opérations élémentaires à effectuer lorsque l'on pose la multiplication à la française de deux nombres à n chiffres.

   a. Déterminer la valeur de $MINf(2)$ et donner un exemple illustrant ce cas.

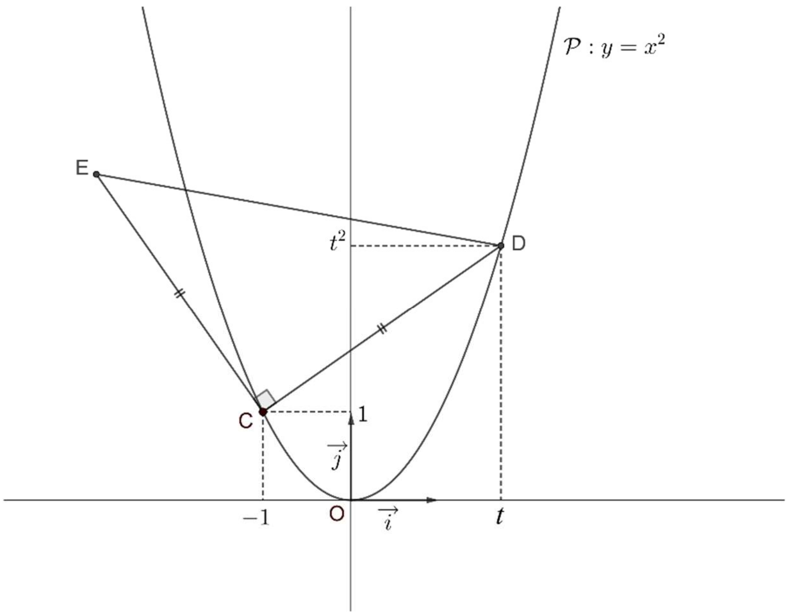
   b. Déterminer la valeur de $MAXf(2)$ et donner un exemple illustrant ce cas.

   c. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, $MINf(n)$ et $MAXf(n)$ en fonction de n.

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)
Triangle rectangle isocèle et parabole

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On se propose d'inscrire un triangle rectangle isocèle dans la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

1. **Un exemple :** On considère les points A(1 ; 1) et C$(-1\ ;\ 1)$.
   Montrer que le triangle OAC est rectangle, isocèle et que ses sommets appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$.
2. Soient a et b deux réels non tous nuls.
   Soient M, N et P trois points du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{MN}}(a\,;b)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}(-b\,;a)$.
   Montrer que le triangle MNP est rectangle isocèle en M.
3. Soit t un réel. Soient C(−1 ; 1) et D$(t\ ;\ t^2)$ deux points de la parabole $\mathcal{P}$.
   Déduire de la question précédente les coordonnées d'un point E tel que le triangle CDE soit rectangle isocèle en C.



4. Montrer que le point E appartient à la parabole $\mathcal{P}$ si et seulement si : $t^4 = t + 2$.
5. Sur le graphique donné en annexe, on donne le point C(−1 , 1), la parabole $\mathcal{P}$ etla courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $t \longmapsto t^4$.
   Expliquer comment obtenir géométriquement un point D puis un point E de la parabole $\mathcal{P}$ tels que le triangle CDE soit rectangle isocèle en C. Placer ces points sur le graphique en annexe (on laissera apparents les traits de construction).
6. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[1\,;\frac{3}{2}\right]$ par $f(t) = t^4 - t - 2$.
   Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\left[1\,;\frac{3}{2}\right]$, puis dresser son tableau de variations complet.

   On admet dans la suite de cet exercice que l'équation $f(t) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $\left[1\,;\frac{3}{2}\right]$.

7. Bertrand applique l'algorithme suivant, appelé « méthode de dichotomie » pour rechercher des encadrements de plus en plus précis de α .
   On note a_0 et b_0 les bornes de l'intervalle initial dans lequel on recherche α.
   On a ainsi : $a_0 = 1$ et $b_0 = \frac{3}{2}$.

→ Si $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > 0$, on pose $\begin{cases} a_1 = a_0 \\ b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \end{cases}$.

Sinon, on pose $\begin{cases} a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \\ b_1 = b_0 \end{cases}$.

On obtient ainsi un intervalle de recherche $[a_1; b_1]$ qui contient α et est deux fois moins large que l'intervalle de recherche précédent $[a_0; b_0]$.

→ Si $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, on pose $\begin{cases} a_2 = a_1 \\ b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$.

Sinon, on pose $\begin{cases} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \\ b_2 = b_1 \end{cases}$.

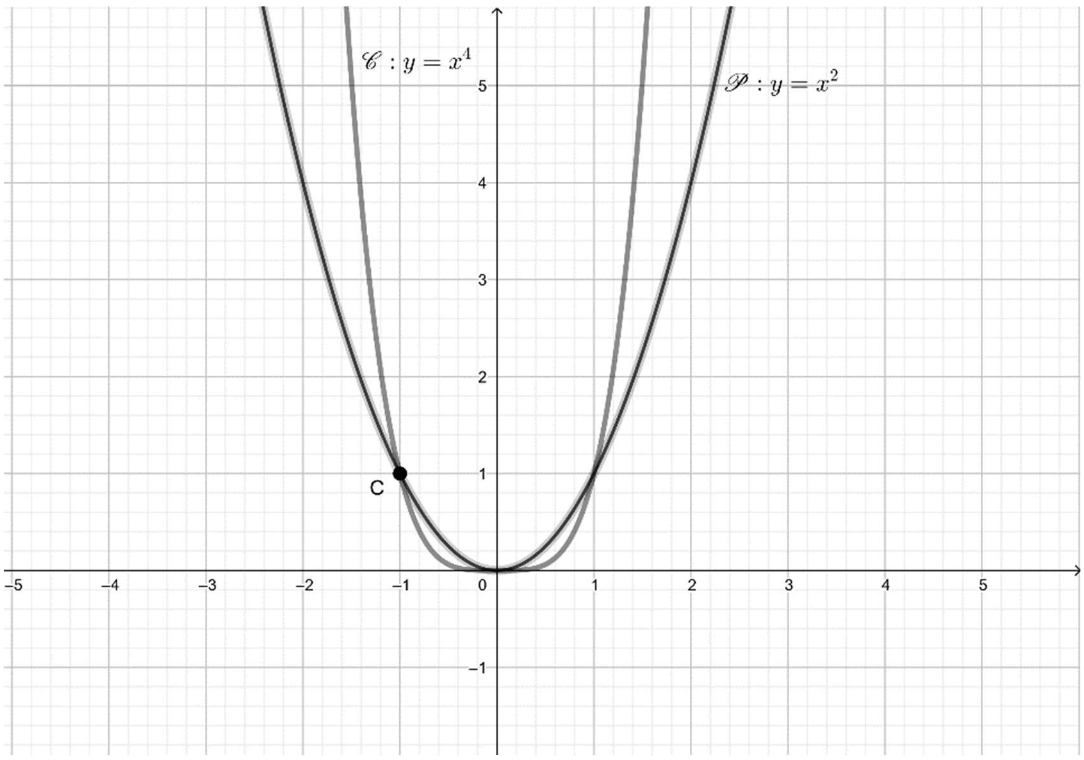
On obtient ainsi un intervalle de recherche $[a_2 ; b_2]$ qui contient α et est deux fois moins large que l'intervalle de recherche précédent $[a_1 ; b_1]$.

a. Déterminer l'intervalle $[a_2 ; b_2]$ (on exprimera a_2 et b_2 sous forme de fractions irréductibles).

b. En répétant n fois ce procédé (où n est un entier supérieur ou égal à 1), on obtient à la n-ième étape un intervalle de recherche $[a_n ; b_n]$ tel que a_n et b_n sont des nombres rationnels de la forme $\frac{p}{2^q}$, où p est un entier impair et q un entier supérieur ou égal à 1.
Est-il possible que $a_n$ou b_n soit égal à α ?

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE

À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES QUI SUIVENT LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES



Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

La société LockyLock commercialise une porte verrouillée par un digicode très simple. Celui-ci comporte uniquement deux boutons, numérotés 0 et 1. La porte ne se déverrouille que si l'utilisateur tape successivement les chiffres d'un code à n chiffres de l'ensemble $\{0, 1\}$ défini à l'avance, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Par exemple, si le code de déverrouillage est 011, et si l'utilisateur appuie successivement sur les touches $0, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ alors la porte sera déverrouillée puisque la séquence 011 a été entrée.
La société LockyLock affiche alors la publicité suivante :

« Avec un code à 7 chiffres, un intrus ne connaissant pas le code devra appuyer jusqu'à 800 fois sur le digicode avant de déverrouiller la porte ! Cela laisse largement le temps de l'intercepter… »

Partie I

1. Considérons, dans cette question uniquement, que le code soit formé de $n = 3$ chiffres.
  - **a.** Écrire l'ensemble des codes à 3 chiffres possibles. On rappelle que les seuls chiffres qui peuvent être utilisés sont 0 et 1.
  - **b.** Combien y a-t-il de codes à 3 chiffres possibles ?
  - **c.** Si un intrus veut être sûr de déverrouiller la porte en entrant successivement tous les codes à 3 chiffres possibles, combien de chiffres devra-t-il entrer en tout ?
  - **d.** Écrire une séquence de 0 et de 1 qui permet, toujours dans le cas d'un code à 3 chiffres, de déverrouiller la porte à coup sûr.

2. Supposons maintenant que le code soit formé de 7 chiffres.
  - **a.** Un intrus souhaite taper successivement tous les codes possibles à 7 chiffres sur le digicode. Combien de chiffres devra-t-il entrer ?
  - **b.** Expliquer alors la publicité énoncée plus haut.

Partie II

1. Dans cette question uniquement, on suppose que le code est formé de $n = 2$ chiffres.
  - **a.** Quels sont les codes à 2 chiffres possibles ?
  - **b.** Expliquer pourquoi la séquence 00110 est intéressante pour un intrus.

2. Vérifier que la séquence 0001110100 contient exactement une fois chaque code de 3 chiffres.
3. Si le code est formé de 4 chiffres. Justifier qu'en entrant la séquence 0000111101100101000, un intrus déverrouille la porte à coup sûr.
4. Que penser maintenant de la publicité de LockyLock ? Expliquer la démarche.