Corrigé - Olympiades de mathématiques 4ème

Exercice 1. La grille infernale

1. Pas de difficultés particulières ici :

3	**11**	19
8	**16**	**24**
13	**21**	**29**

2. On peut immédiatement calculer le nombre se situant au centre de la grille :

a	b	c
5	14	23
d	e	f

   On a également :

$$a + f = b + e = c + d = 28$$

   La somme des neuf nombres de cette grille est donc égale à :

$$28 \times 4 + 14 = \boxed{126}$$

3. Déterminer le nombre se situant au centre de la grille amène à l'équation :

$$\frac{x + 20}{2} = \frac{y + 9}{2}$$

   soit :

$$y = x + 11$$

   Déterminer le nombre se situant en haut à droite de la grille amène à l'équation :

$$2 \times 7 - x = 2 \times y - 20$$

   soit :

$$2y = 34 - x$$

   En résolvant le système d'équations, on trouve :

$$\boxed{x = 4} \text{ et } \boxed{y = 15}$$

Exercice 2. Une spirale

Par construction, à partir du troisième rayon, un rayon est la somme des deux rayons précédents. On retrouve alors la suite de Fibonacci, dont voici les premiers termes :

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

U_{11}	U_{12}	U_{13}	U_{14}	U_{15}	U_{16}	U_{17}	U_{18}	U_{19}	U_{20}
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

1. Le rayon du sixième quart de cercle est 8
   Le rayon du septième quart de cercle est 13
   Le rayon du dixième quart de cercle est 55
2. Le rayon du dix-septième quart de cercle est 1597
3. Le rayon du vingtième quart de cercle est 6765

Exercice 3. Billes en sac

1. La solution la plus rapide pour démontrer que l'on peut vider simultanément les deux sacs semble être :
   (a) Situation de départ :

25 billes	16 billes

   (b) Ôter 7 billes dans chaque sac :

18 billes	9 billes

   (c) Doubler le nombre de billes dans le deuxième sac :

18 billes	18 billes

   (d) Ôter 18 billes dans chaque sac :

0 bille	0 bille

   On pourrait également procéder de la manière suivante :
   (a) Situation de départ :

25 billes	16 billes

   (b) Ôter 15 billes dans chaque sac :

10 billes	1 bille

   (c) Doubler le nombre de billes dans le deuxième sac :

10 billes	2 billes

   (d) Ôter 1 bille dans chaque sac :

9 billes	1 bille

   En répétant cette succession d'opérations (doubler dans le deuxième sac et retirer une bille dans chaque sac), on arrive finalement à nos fins.

2. Tripler un nombre ne change pas sa parité :
   – le triple d'un nombre pair est pair ;
   – le triple d'un nombre impair est impair.

   De plus, si à deux entiers (l'un pair et l'autre impair), on ôte un même nombre entier, la différence de parité est maintenue.

   Les deux nombres de départ (2 et 1) ayant des parités différentes, aucune des deux opérations (tripler l'un deux ou ôter le même nombre à chaque) ne permettra d'avoir soit deux nombres pairs soit deux nombres impairs dans les deux sacs, condition nécessaire pour avoir le même nombre de billes dans chaque sac. Il est par conséquent impossible de vider simultanément les deux sacs.

Exercice 4. Des triangles et des nombres

1. **Procédure experte.**
   On pose $x = AH$ et on applique le théorème de Pythagore dans les triangles CHA et CHB rectangles en H pour calculer CH de deux manières. On obtient :

$$CH^2 = 13^2 - x^2 \qquad \text{et} \qquad CH^2 = 15^2 - (14 - x)^2$$

   En développant, on obtient l'équation :

$$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x - x^2$$
$$x = \frac{169 - 225 + 196}{28} = 5$$

   On trouve alors que :

$$CH = \sqrt{13^2 - 5^2} = \boxed{12}$$

Procédure de gros malin.
Si on connaît quelques triplets Pythagoriciens, le triangle rectangle de côtés $5-12-13$ et celui de côtés $9-12-15$ (dérivé de $3-4-5$) peuvent s'assembler pour donner un triangle de côtés $13-14-15$. L'unicité d'un tel triangle permet alors de conclure que la hauteur issue de C mesure 12.

CH est donc bien un nombre entier.

2. L'aire du triangle ABC est :
$$\frac{14\times 12}{2}=84$$
On peut aussi calculer cette aire en choisissant CB comme base et AJ comme hauteur :
$$\frac{15\times AJ}{2}$$
On trouve alors AJ en calculant :
$$AJ=\frac{2\times 84}{15}=\frac{168}{15}=\boxed{11,2}$$
AJ est donc bien un nombre décimal.

On peut également calculer l'aire du triangle ABC en choisissant AC comme base et BK comme hauteur :
$$\frac{13\times BK}{2}$$
On trouve alors BK en calculant :
$$BK=\frac{2\times 84}{13}=\boxed{\frac{168}{13}}$$
BK est donc bien un quotient d'entiers.

3. Une solution est de multiplier les cotés $13-14-15$ par 13×15.