

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2009

MARDI 7 AVRIL 2009 (14h – 16h)

SUJET QUATRIEME

Les calculatrices seront autorisées ainsi que le matériel usuel de géométrie.
Le recours à l'usage des ordinateurs est interdit.
Lors de la correction toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte, une justification étant attendue pour toute réponse proposée.

Vous penserez par ailleurs à indiquer sur vos copies :

NOM, Prénom

Classe

Etablissement (le cachet de l'établissement sera apposé sur chaque copie)

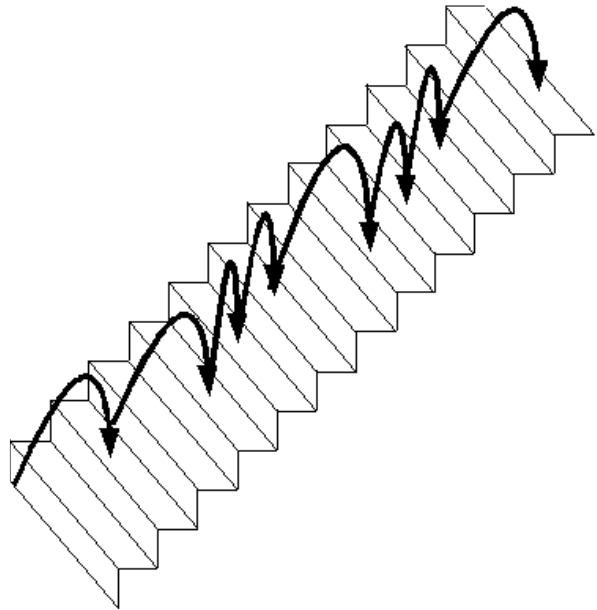
Exercice numéro 1

L'escalier

On peut monter un escalier une ou deux marches à la fois. La figure de droite montre un exemple.

1. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de une marche ? de deux marches ? de trois marches ? de quatre marches ? de cinq marches ?

2. De combien de façons différentes peut-on monter un escalier de 20 marches ?



Exercice numéro 2

Découpages et assemblage

Le but du problème est la décomposition de certains triangles en deux triangles isocèles.

L'usage des instruments traditionnels (équerre, règle graduée, compas, rapporteur) est autorisé et sans doute nécessaire. Il est rappelé que les problèmes de construction appellent une argumentation rédigée.

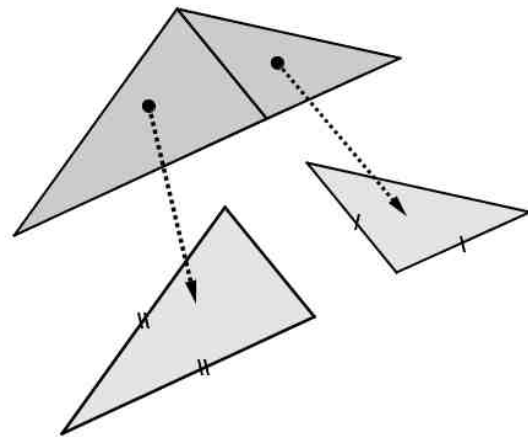
1. On considère un triangle rectangle ABC. Décomposer ce triangle en deux triangles isocèles.

2. a. On considère un triangle DEF. L'angle de sommet E mesure 35 degrés et l'angle de sommet F mesure 70 degrés.

Décomposer ce triangle en deux triangles isocèles.

b. Construire un triangle GHI différent des deux précédents tel que l'on puisse le décomposer en deux triangles isocèles.

3. On considère un triangle KLM isocèle et d'angle à la base de mesure x . Peut-on lui accoler un autre triangle isocèle afin d'obtenir un nouveau triangle isocèle ? Comment faire ?



Un découpage possible

(la figure n'est pas juste)

Exercice numéro 3

Des un avec des neuf

1. Calculer les sommes : $a = 99 + 999$ et $b = 99 + 999 + 9999$.

2. On considère le nombre N défini comme la somme :

$$N = 99 + 999 + 9999 + \dots + 9999999 \dots 999$$

Le premier terme de cette somme s'écrit avec deux chiffres 9 ; on ajoute les nombres s'écrivant avec trois puis quatre chiffres 9, etc. Le dernier terme de la somme s'écrit avec cent chiffres 9.

On effectue la somme et on écrit N en écriture décimale ordinaire. Combien de fois le chiffre 1 apparaît-il dans cette écriture ?

Exercice numéro 4

Faites-moi une petite place

On considère un cercle \mathcal{C}_0 , de centre O et de rayon 6, et deux diamètres perpendiculaires $[AC]$ et $[BD]$ de ce cercle. On désigne par M et N les milieux de $[AO]$ et $[OC]$. On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les cercles de rayon 3 et de centres respectifs M et N .

1. Déterminer la position du centre P et le rayon du cercle \mathcal{C}_3 , tangent aux cercles \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 (on rappelle que les centres de deux cercles tangents et leur point de contact sont alignés).

2. Montrer que, si on appelle Q le centre du cercle \mathcal{C}_4 tangent aux cercles \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 , le quadrilatère $MOPQ$ est un rectangle. Quel est le rayon du cercle \mathcal{C}_4 ?

