Bloc 11
Calcul Intégral

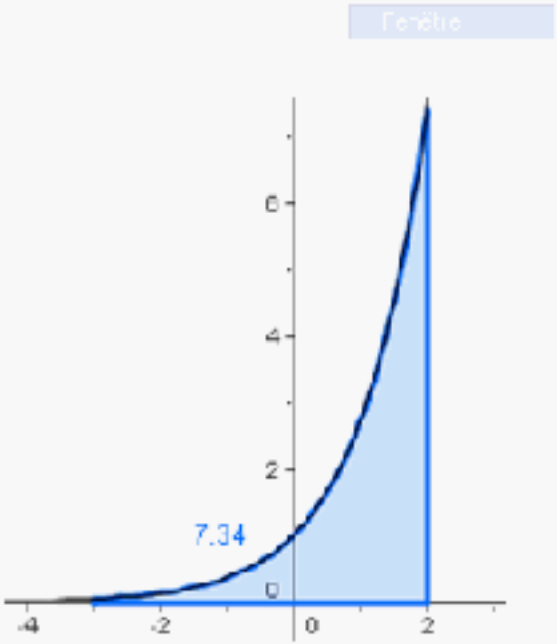
Intégrale d'une fonction
Suites adjacentes

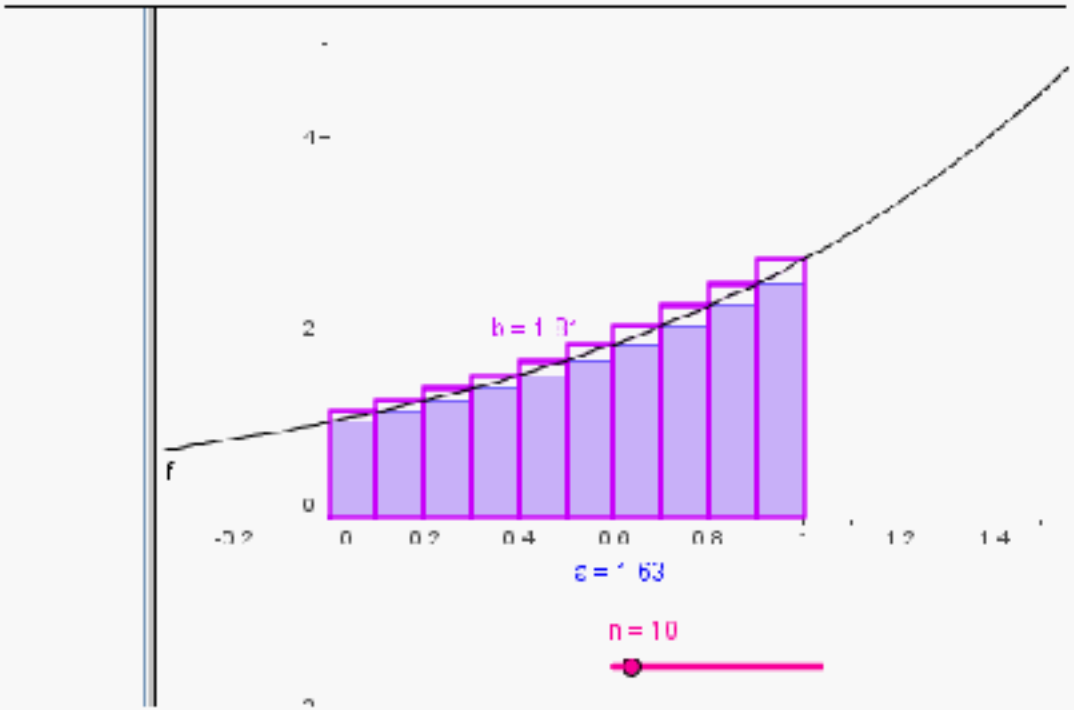
TS
2006-2007

1. Problème

- On sait calculer l'aire ...
  - d'un triangle
  - d'un carré, d'un rectangle, d'un trapèze, d'un parallélogramme, d'un quadrilatère en général
  - d'un disque

- Comment calculer l'aire d'une surface ayant un bord courbe autre qu'un cercle ?
  - Ici le domaine est limité par la courbe de la fonction exp, l'axe des x et les droites x=-3, x=2.

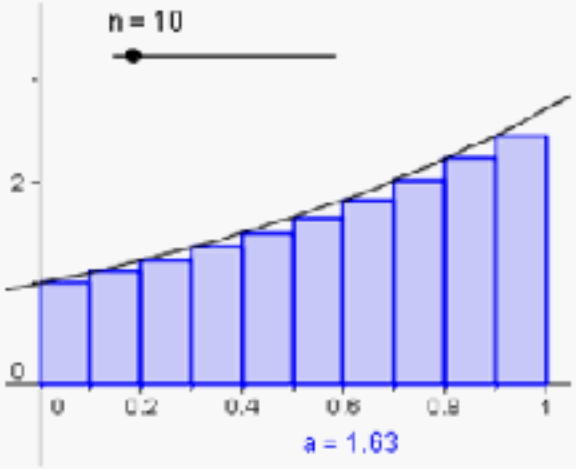


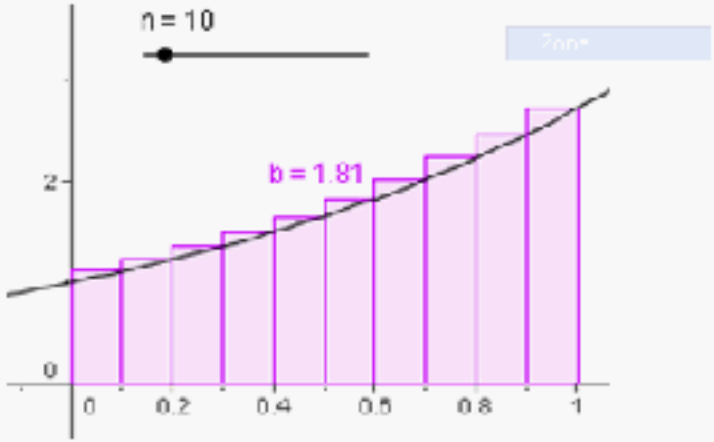

f
n = 10

Méthode

On travaille sur l'intervalle [0;1]

- On va découper l'aire sous la courbe en un certain nombre de rectangles, et ajouter les aires de ces rectangles.
- 2 possibilités :





- Comment augmenter la précision ?
- En augmentant le nombre n de rectangles.
- On fabrique ainsi 2 suites de nombres, qu'on appelle des suites adjacentes : démo

- Vérifier que si on partage l'intervalle [0;1] en n intervalles de longueur 1/n, les sommes des aires des rectangles inférieurs et supérieurs sont respectivement :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} - \ldots + e^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$\times e^{\frac{1}{n}}$ $\times e^{1/n}$

$$v_n = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n}{n}}\right)$$

$e^a \times e^b = e^{a+b}$

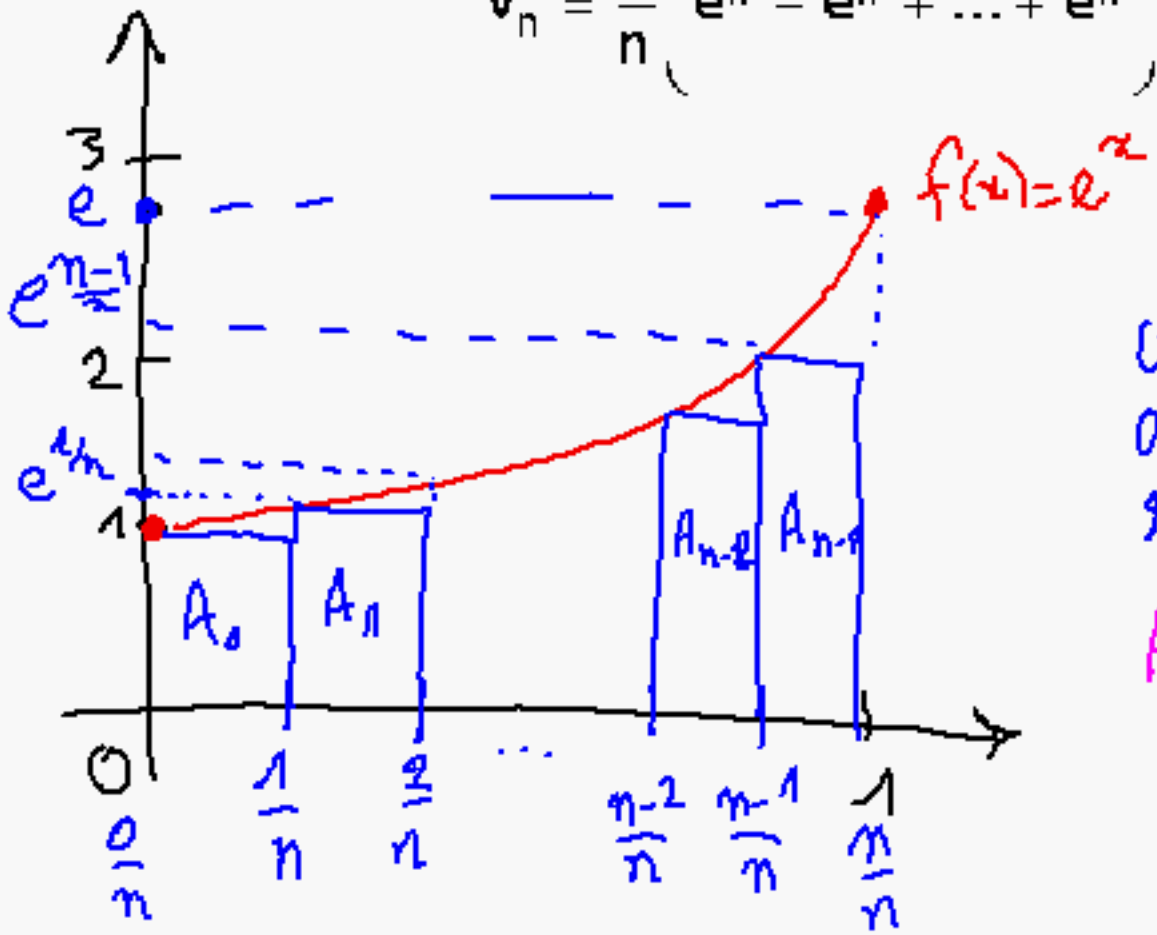
$A_0 = \frac{1}{n} \times 1$

$A_1 = \frac{1}{n} \times e^{1/n}$

$A_2 = \frac{1}{n} \times e^{2/n}$

$\vdots$

$A_{n-1} = \frac{1}{n} \times e^{\frac{n-1}{n}}$



u_n est la somme des aires des n rectangles situés sous la courbe.

Analogue pour v_n.

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\overbrace{1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}}}^{S_n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} ?$$

$\times e^{\frac{1}{n}}$ $\times e^{1/n}$

Les nombres $1, e^{1/n}, e^{2/n}, e^{3/n}, \ldots, e^{\frac{n-1}{n}}$ forment une suite géométrique, de raison $e^{1/n}$.

En effet : $e^{\frac{k}{n}} \times e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{k}{n} + \frac{1}{n}} = e^{\frac{k+1}{n}}$

$$S_n = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$S_n = 1 \times \frac{1 - (e^{1/n})^n}{1 - e^{1/n}} = \frac{1 - e}{1 - e^{1/n}}$$

$(e^a)^b = e^{a \times b}$

$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

$$\text{normal}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}\right) \quad \frac{e^1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$\frac{e^1 - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

On doit chercher la limite de $\frac{1}{n} \times \frac{1-e}{1-e^{1/n}}$ qd $n \to +\infty$

On va utiliser le taux de variation d'une fonction.

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{0}}{\frac{1}{n} - 0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$\lim_{n} \frac{e^{1} - 1}{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) n}$$

$$\frac{e^{x} - e^{0}}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} e'(0) = e(0) = 1$$

$$e^{1} - 1$$

A quelle condition $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ a-t-il une limite qd $b \to a$.

Si f est dérivable en a : $f'(a)$

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/cgi-bin/giac_online/giac.pl?langue=fr

$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1-e}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1-e^{1/n}}{1-e}} \quad \times \text{cas}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1-e^{1/n}} \times (1-e)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{e^{1/n}-1} \times (e-1)$$

$$= \frac{1}{\frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}-0}} (e-1) = \frac{1}{\frac{e^{1/n}-e^{0}}{\frac{1}{n}-0}} \times (e-1)$$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} \frac{1}{e'(0)} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

Conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e^1 - 1 \approx 1{,}72$$

De m̂

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = e - 1$$

$$u_n \leq \text{Aire} \leq v_n$$

$$u_n \to e-1 \qquad v_n \to e-1$$

$$\text{Aire} = \int_0^1 e^x \, dx$$

2. Suites adjacentes

- Définition
- On dira que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{l'une croît} \\ \text{l'autre décroît} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

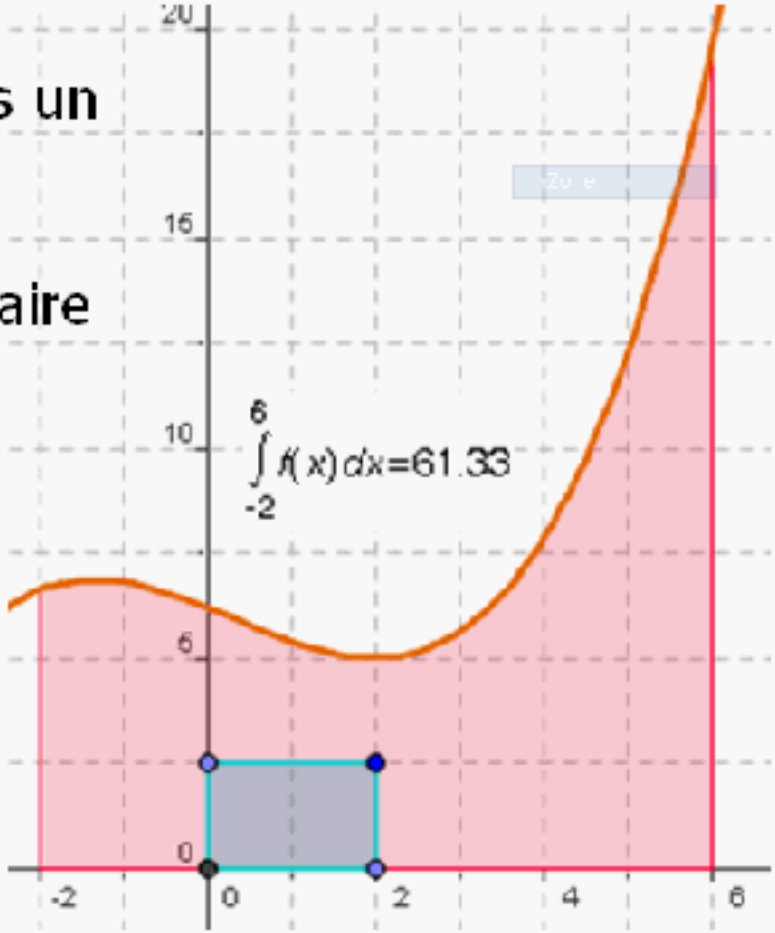
3.Intégrale d'une fonction

a. Intégrale d'une fonction positive

- Définition

- Soit f une fonction positive sur un intervalle [a,b], et C_f sa courbe dans un repère orthogonal.

- On appelle intégrale de f sur [a,b] l'aire du domaine délimité par :
  - la courbe de f
  - l'axe des abscisses
  - les droites d'équations x=a et x=b
  - l'unité d'aire est celle définie par le repère



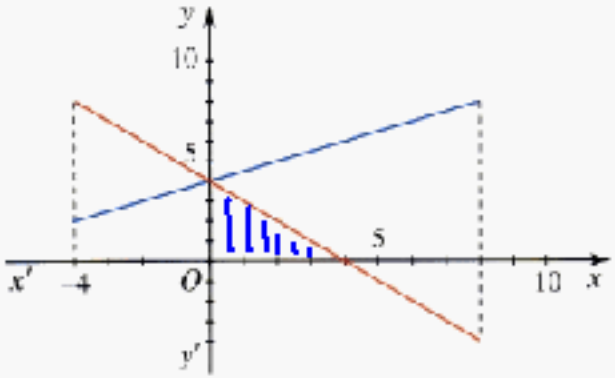
- Notation : $\int_a^b f(x)\,dx$

Définition d'une intégrale

1 Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = 4 - x.$$

1. Vérifier les représentations graphiques de f et g ci-dessous sur l'intervalle $[-4 ; 8]$.



2. En utilisant des calculs d'aires, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x ; \quad \int_0^8 g(x)\mathrm{d}x ; \quad \int_{-4}^0 f(x)\mathrm{d}x ; \quad \int_0^8 f(x)\mathrm{d}x.$$

n°s 1 et 2
p 186 -