Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré,

Par Jean-Christophe Yoccoz

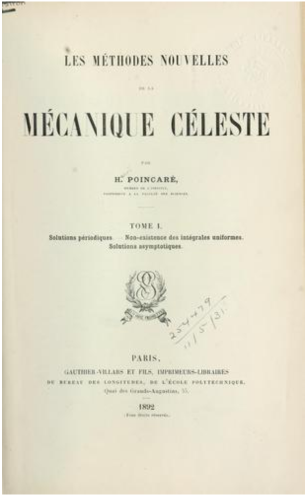
UPJV, Amiens, le 8 février 2012

Préconférence

par Véronique Martin, Samuel Petite, Emmanuelle Sebert, Barbara Schapira, Gabriel Vigny

membres du L.A.M.F.A.,
Université de Picardie Jules Verne

Jean-Christophe YOCCOZ


LES MÉTHODES NOUVELLES

MÉCANIQUE CÉLESTE

H. POINCARÉ,

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes. — Solutions asymptotiques.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

Jean-Christophe Yoccoz à Oberwolfach en 2005, et un traité de Poincaré.

Jean-Christophe YOCCOZ

Jean-Christophe YOCCOZ

- Reçu premier à l'École Normale Supérieure à 18 ans (1975) ,

Jean-Christophe YOCCOZ

- Reçu premier à l'École Normale Supérieure à 18 ans (1975) ,
- Reçu premier ex aequo à l'agrégation de mathématiques (1977) ,

Jean-Christophe YOCCOZ

• Reçu premier à l'École Normale Supérieure à 18 ans (1975) ,
• Reçu premier ex aequo à l'agrégation de mathématiques (1977) ,
• Thèse d'État soutenue en 1985, sous la direction de Michael Robert Herman ,

Jean-Christophe YOCCOZ

• Reçu premier à l'École Normale Supérieure à 18 ans (1975) ,
• Reçu premier ex aequo à l'agrégation de mathématiques (1977) ,
• Thèse d'État soutenue en 1985, sous la direction de Michael Robert Herman ,
• Élu à l'Académie des Sciences en 1994 ,

Jean-Christophe YOCCOZ

• Reçu premier à l'École Normale Supérieure à 18 ans (1975) ,
• Reçu premier ex aequo à l'agrégation de mathématiques (1977) ,
• Thèse d'État soutenue en 1985, sous la direction de Michael Robert Herman ,
• Élu à l'Académie des Sciences en 1994 ,
• Actuellement Professeur au Collège de France, et Professeur à l'Université Paris-Sud (Orsay).

J.-C. Yoccoz

J.-C. Yoccoz

• Jean-Christophe Yoccoz a reçu en **1994** la **médaille Fields**, la plus haute récompense en mathématiques .

J.-C. Yoccoz

• Jean-Christophe Yoccoz a reçu en **1994** la **médaille Fields**, la plus haute récompense en mathématiques .

• Il a reçu cette récompense pour ses travaux en **Systèmes dynamiques** .

Henri Poincaré

Henri Poincaré

Henri Poincaré

- Mathématicien français, 1854-1912

Henri Poincaré

- Mathématicien français, 1854-1912
- Mais aussi physicien, philosophe des sciences, ...

Livre : **La Science et l'hypothèse**

Henri Poincaré

- Mathématicien français, 1854-1912
- Mais aussi physicien, philosophe des sciences, ...

Livre : **La Science et l'hypothèse**

- L'un des plus grands scientifiques de son époque.

Henri Poincaré

- Mathématicien français, 1854-1912
- Mais aussi physicien, philosophe des sciences, ...

Livre : **La Science et l'hypothèse**

- L'un des plus grands scientifiques de son époque.
- Le père des **Systèmes dynamiques.**

Henri Poincaré

- Mathématicien français, 1854-1912
- Mais aussi physicien, philosophe des sciences, ...

Livre : **La Science et l'hypothèse**

- L'un des plus grands scientifiques de son époque.
- Le père des **Systèmes dynamiques.**

Plus de détails le 8 février

Modélisation mathématique

Choix des variables quantitatives. Il faut déterminer :

Modélisation mathématique

Choix des variables quantitatives. Il faut déterminer :

- **les variables d'état** décrivent l'état du système (ou du phénomène à modéliser).

  Par exemple, une position (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, une quantité $n \in \mathbb{N}$, ...

Modélisation mathématique

Choix des variables quantitatives. Il faut déterminer :

- **les variables d'état** décrivent l'état du système (ou du phénomène à modéliser).
  Par exemple, une position (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, une quantité $n \in \mathbb{N}$, ...
- L'**espace des phases** correspond à tous les états possibles du système considéré.

Ce peut être un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{N}$ ou un ensemble plus compliqué.

Modélisation mathématique

Un exemple :
On s'intéresse à la population de lapins et de renards en Picardie.
On note

$$\begin{array}{cc} L(t) & \text{la population de lapins au temps } t \\ R(t) & \text{la population de renards au temps } t. \end{array}$$

L'*espace des phases* est l'ensemble

$$\{(L(t), R(t));\ \text{pour tout } t\} \subset (\mathbb{R}_+)^2 .$$

Modélisation mathématique

Autre exemple

On s'intéresse à un corps (un point) en mouvement dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Modélisation mathématique

Autre exemple

On s'intéresse à un corps (un point) en mouvement dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Subtilité

Un corps dans une position donnée $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ peut partir dans différentes directions, aller plus ou moins vite.
On introduit donc un paramètre supplémentaire :

$$\text{la vitesse } v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Modélisation mathématique

Autre exemple

On s'intéresse à un corps (un point) en mouvement dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Subtilité

Un corps dans une position donnée $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ peut partir dans différentes directions, aller plus ou moins vite.
On introduit donc un paramètre supplémentaire :

$$\text{la vitesse } v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Le mouvement du corps est modélisé par un couple position-vitesse

$$(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6.$$

L'espace des phases est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^6$.

Comment évolue le système au cours du temps ?

Évolution discrète.

$$\begin{aligned} L(n+1) &= g\left((L(n), R(n)\right) \\ R(n+1) &= h\left(L(n), R(n)\right) \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{Z}$ représente le temps (discrétisé), et g, h sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Comment évolue le système au cours du temps ?

Évolution discrète.

$$\begin{aligned} L(n+1) &= g\left((L(n), R(n)\right) \\ R(n+1) &= h\left(L(n), R(n)\right) \end{aligned}$$

où $n \in \mathbb{Z}$ représente le temps (discrétisé), et g, h sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Évolution continue.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= g(x(t), v(t)) \\ \frac{dv}{dt}(t) &= h(x(t), v(t)) \end{aligned}$$

Dans ce cas on doit résoudre une **équation différentielle**.

Systèmes dynamiques

La **théorie des systèmes dynamiques** étudie l'évolution au cours du temps t d'un système. On note $\varphi_t(x)$, ou $f(t,x)$, la position à l'instant t de la variable d'état qui est à la position x à l'instant $t = 0$.

Systèmes dynamiques

La **théorie des systèmes dynamiques** étudie l'évolution au cours du temps t d'un système. On note $\varphi_t(x)$, ou $f(t,x)$, la position à l'instant t de la variable d'état qui est à la position x à l'instant $t = 0$.
En général, on ne sait par résoudre les équations d'évolutions.
De plus l'évolution du système peut être très compliquée à décrire.

Systèmes dynamiques

La **théorie des systèmes dynamiques** étudie l'évolution au cours du temps t d'un système. On note $\varphi_t(x)$, ou $f(t,x)$, la position à l'instant t de la variable d'état qui est à la position x à l'instant $t = 0$.
En général, on ne sait par résoudre les équations d'évolutions.
De plus l'évolution du système peut être très compliquée à décrire.

Les systèmes dynamiques sont nés avec les travaux de **Henri Poincaré**, au passage du 19ème au 20ème siècle, en particulier sur le *problème des trois corps*. Il décrit l'évolution d'un système sans le résoudre explicitement par une formule.

Retour sur les équations différentielles

Pour une fonction f donnée, définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on cherche une fonction $X\colon t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t)).$$

Retour sur les équations différentielles

Pour une fonction f donnée, définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on cherche une fonction $X\colon t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t)).$$

Interprétation géométrique.
$t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ définit une **courbe intégrale** dont la tangente au point $X(t)$ est dirigée par $f(X(t))$.

Si $f(x_0) = 0$, alors la courbe constante $t \mapsto x_0$ est solution.
Le point x_0 est dit **point critique**.

Retour sur les équations différentielles

Pour une fonction f donnée, définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on cherche une fonction $X\colon t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t)).$$

Interprétation géométrique.
$t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ définit une **courbe intégrale** dont la tangente au point $X(t)$ est dirigée par $f(X(t))$.

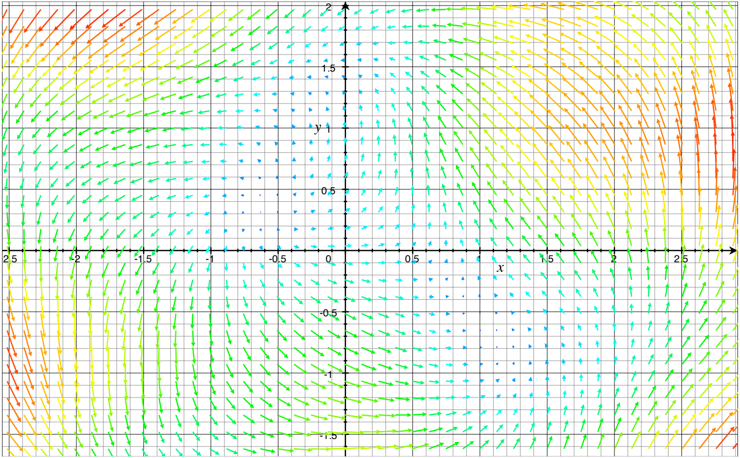
Si $f(x_0) = 0$, alors la courbe constante $t \mapsto x_0$ est solution.
Le point x_0 est dit **point critique**.

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* affirme que par chaque point de l'espace des phases, passse une unique courbe intégrale.

Retour sur les équations différentielles

Exemple

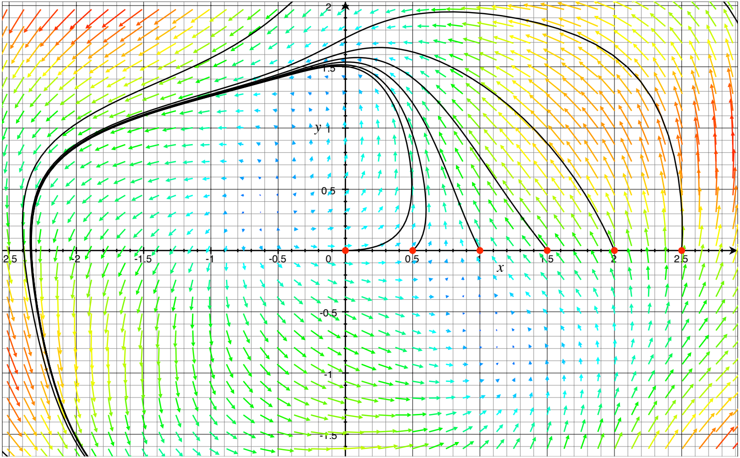
$$f(x, y) = (-y + \cos(2x), x + \sin(2y))$$



Retour sur les équations différentielles

Exemple

$$f(x, y) = (-y + \cos(2x), x + \sin(2y))$$



Retour sur les équations différentielles

On sait rarement résoudre une équation différentielle explicitement par une jolie formule.

Retour sur les équations différentielles

On sait rarement résoudre une équation différentielle explicitement par une jolie formule.

L'équation différentielle $t^2 y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y = 1$ peut être résolue « à l'ancienne ». On cherche y sous la forme d'une série entière $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ et on résout. Exercice !

Retour sur les équations différentielles

On sait rarement résoudre une équation différentielle explicitement par une jolie formule.

L'équation différentielle $t^2y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y = 1$ peut être résolue « à l'ancienne ». On cherche y sous la forme d'une série entière $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ et on résout. Exercice !

L'équation différentielle $3ty'(t) + (2 - 5t)y(t) = t$ a des solutions plus compliquées. La formule existe, mais ne nous apprend *a priori* pas grand chose, sans ordinateur.

Retour sur les équations différentielles

On sait rarement résoudre une équation différentielle explicitement par une jolie formule.

L'équation différentielle $t^2y"(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y = 1$ peut être résolue « à l'ancienne ». On cherche y sous la forme d'une série entière $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ et on résout. Exercice !

L'équation différentielle $3ty'(t) + (2 - 5t)y(t) = t$ a des solutions plus compliquées. La formule existe, mais ne nous apprend *a priori* pas grand chose, sans ordinateur.

L'équation différentielle $y''(t) + \sin(t)y'(t) + e^{-1/t^2}y(t) = 0$ n'a pas de solution développable en série entière au voisinage de 0.

Retour sur les équations différentielles

On sait rarement résoudre une équation différentielle explicitement par une jolie formule.

L'équation différentielle $t^2y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y = 1$ peut être résolue « à l'ancienne ». On cherche y sous la forme d'une série entière $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ et on résout. Exercice !

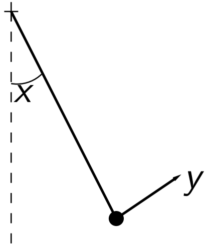
L'équation différentielle $3ty'(t) + (2 - 5t)y(t) = t$ a des solutions plus compliquées. La formule existe, mais ne nous apprend *a priori* pas grand chose, sans ordinateur.

L'équation différentielle $y''(t) + \sin(t)y'(t) + e^{-1/t^2}y(t) = 0$ n'a pas de solution développable en série entière au voisinage de 0.

Que peut-on dire de l'équation $t^2y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y = 0$?

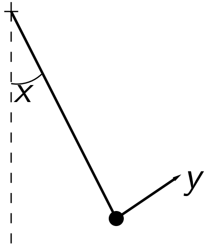
Le pendule simple

Le pendule simple



Supposons que la tige du pendule est rigide et de longueur l.

Le pendule simple

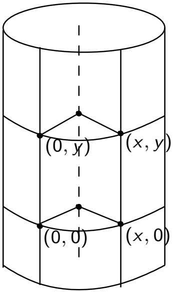


Supposons que la tige du pendule est rigide et de longueur l.
La position du pendule est repérée par son angle avec la verticale, ou encore par un point x du cercle S^1 de rayon 1, centré sur le point de suspension du pendule.
La vitesse angulaire du pendule est notée y.

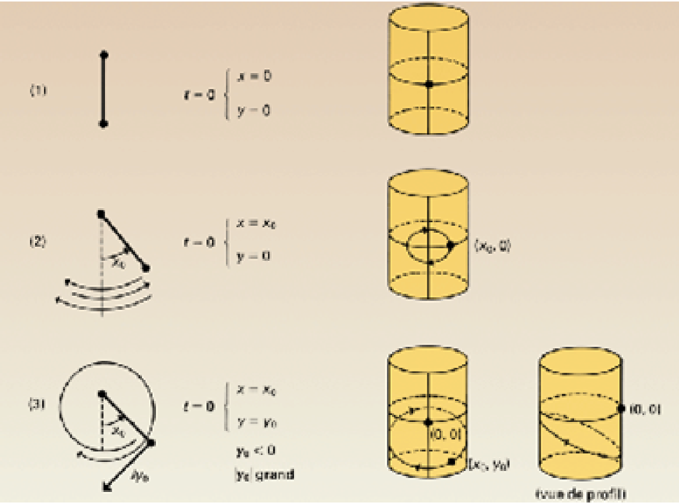
L’espace des phases du pendule

L'espace des phases du pendule

L'ensemble des couples position-vitesse (x, y) admissibles constitue **l'espace des phases** du pendule. C'est un cylindre, produit topologique $S^1 \times \mathbb{R}$ d'un cercle par une droite.



Quelques expériences sur le pendule



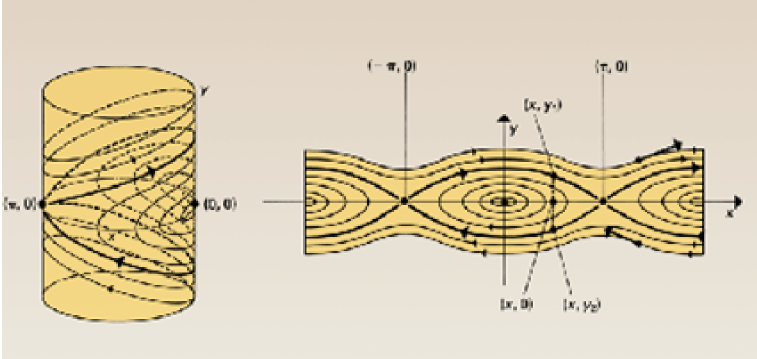
Le portrait de phase du pendule simple

Le portrait de phase du pendule simple

Il est possible maintenant d'esquisser le **portrait de phase**, c'est-à-dire l'ensemble des courbes intégrales.
Plutôt que sur le cylindre, on trace ces courbes sur un cylindre déroulé, pour y voir plus clair.

Le portrait de phase du pendule simple

Il est possible maintenant d'esquisser le **portrait de phase**, c'est-à-dire l'ensemble des courbes intégrales.
Plutôt que sur le cylindre, on trace ces courbes sur un cylindre déroulé, pour y voir plus clair.



Equation différentielle pour le pendule simple

Equation différentielle pour le pendule simple

Le mouvement du pendule (sans frottements) est régi par l'équation différentielle

$$x''(t) = -\omega^2 \sin x(t) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

est la vitesse angulaire, g la constante de gravitation universelle, et l la longueur de la tige.

Equation différentielle pour le pendule simple

Le mouvement du pendule (sans frottements) est régi par l'équation différentielle

$$x''(t) = -\omega^2 \sin x(t) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

est la vitesse angulaire, g la constante de gravitation universelle, et l la longueur de la tige.

Cette équation peut se réécrire comme *équation différentielle autonome* du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -\omega^2 \sin x(t) \end{pmatrix}.$$

Equation différentielle pour le pendule simple

Une forme notable de l'équation est

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{cases}$$

où $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x)$ est le **hamiltonien** du pendule, proportionnel à l'énergie totale du pendule en position x avec vitesse y.

Equation différentielle pour le pendule simple

Une forme notable de l'équation est

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) \end{cases}$$

où $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x)$ est le **hamiltonien** du pendule, proportionnel à l'énergie totale du pendule en position x avec vitesse y.
Si $t \mapsto (x(t), y(t))$ est solution, alors la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto H(x(t), y(t)) \text{ est constant.}$$

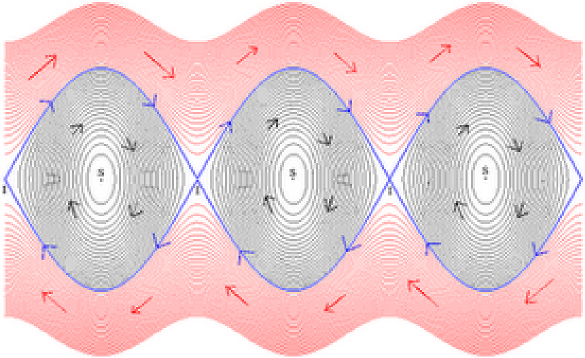
Il y a donc *conservation de l'énergie*.

Equation différentielle pour le pendule simple

Ces courbes intégrales sont donc contenues dans les courbes $\{(x, y); H(x, y) = cste\}$: les **lignes de niveau du hamiltonien**. Ceci permet d'obtenir la figure ci-dessous.

Equation différentielle pour le pendule simple

Ces courbes intégrales sont donc contenues dans les courbes $\{(x, y); H(x, y) = cste\}$: les **lignes de niveau du hamiltonien**. Ceci permet d'obtenir la figure ci-dessous.



Les points d’équilibre du pendule simple

Les points d'équilibre du pendule simple

Si le pendule part d'une position proche de $x = 0$ avec une vitesse proche de $y = 0$, il va rester proche. Les courbes intégrales périodiques autour du point d'équilibre $(0, 0)$ signifient que cet équilibre est **stable**.

Les points d'équilibre du pendule simple

Si le pendule part d'une position proche de $x = 0$ avec une vitesse proche de $y = 0$, il va rester proche. Les courbes intégrales périodiques autour du point d'équilibre $(0, 0)$ signifient que cet équilibre est **stable**.

Deux courbes intégrales partent du point $(\pi, 0)$ en $-\infty$, s'en éloignent beaucoup, pour y revenir en $+\infty$. Elles ne contiennent pas ce point.

Les points d'équilibre du pendule simple

Si le pendule part d'une position proche de $x = 0$ avec une vitesse proche de $y = 0$, il va rester proche. Les courbes intégrales périodiques autour du point d'équilibre $(0, 0)$ signifient que cet équilibre est **stable**.

Deux courbes intégrales partent du point $(\pi, 0)$ en $-\infty$, s'en éloignent beaucoup, pour y revenir en $+\infty$. Elles ne contiennent pas ce point.
Ces deux courbes correspondent aux trajectoires partant tout près de l'équilibre instable avec une toute petite vitesse dans un passé infiniment lointain, et revenant après un tour complet dans un futur infiniment lointain. L'équilibre $(\pi, 0)$ est **instable** (c'est clair d'un point de vue physique).

Les points d'équilibre du pendule simple

Si le pendule part d'une position proche de $x = 0$ avec une vitesse proche de $y = 0$, il va rester proche. Les courbes intégrales périodiques autour du point d'équilibre $(0, 0)$ signifient que cet équilibre est **stable**.

Deux courbes intégrales partent du point $(\pi, 0)$ en $-\infty$, s'en éloignent beaucoup, pour y revenir en $+\infty$. Elles ne contiennent pas ce point.
Ces deux courbes correspondent aux trajectoires partant tout près de l'équilibre instable avec une toute petite vitesse dans un passé infiniment lointain, et revenant après un tour complet dans un futur infiniment lointain. L'équilibre $(\pi, 0)$ est **instable** (c'est clair d'un point de vue physique).

Ces courbes, négativement et positivement asymptotes à un point d'équilibre instable, sont appelées **courbes homoclines**.

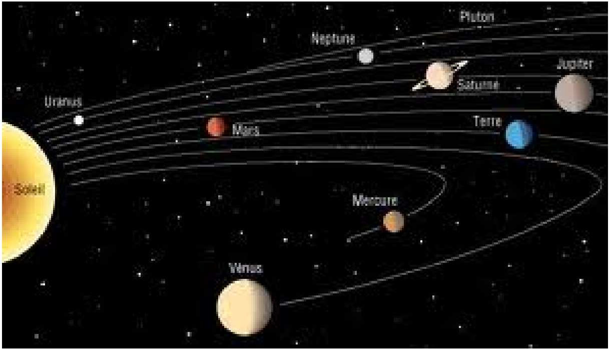
Le problème à N corps

Le problème à N corps

A l'époque de Poincaré, les scientifiques s'interrogent sur la stabilité à long terme de notre système solaire...

Le problème à N corps

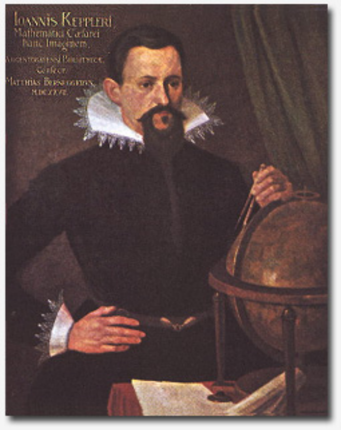
A l'époque de Poincaré, les scientifiques s'interrogent sur la stabilité à long terme de notre système solaire...

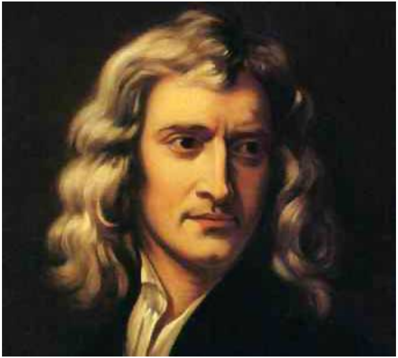


On cherche à comprendre le mouvement de N masses ponctuelles en interaction via les forces de gravitation.

Le problème à 2 corps

- Les solutions sont dues à Johannes Kepler (1571-1630), presque un siècle avant les travaux Isaac Newton (1643-1727)
- Les trajectoires bornées sont des **ellipses**.





Les solutions du problème à deux corps

Simulation pour deux corps de même masse
Simulation pour un corps de masse plus importante que l'autre.

Les solutions du problème à deux corps

Simulation pour deux corps de même masse
Simulation pour un corps de masse plus importante que l'autre.
Le mouvement des deux corps X, Y de masse m_X, m_Y peut se ramener à l'équation différentielle suivante :

$$m_X X''(t) = -\frac{\partial U}{\partial X}, \qquad m_Y Y''(t) = -\frac{\partial U}{\partial Y},$$

où $U = -\frac{m_X m_Y}{||X - Y||}$.

Les solutions du problème à deux corps

Simulation pour deux corps de même masse
Simulation pour un corps de masse plus importante que l'autre.
Le mouvement des deux corps peut se ramener à l'équation différentielle suivante, que l'on sait résoudre :

$$u''(\theta) + u(\theta) = \text{constante},$$

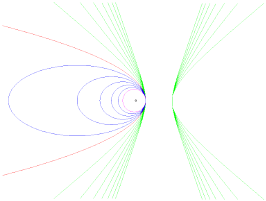
où (r, θ) sont les coordonnées polaires de l'une des deux masses, dans un repère centré au centre de masses, et $u = \frac{1}{r}$.

Les solutions du problème à deux corps

Simulation pour deux corps de même masse
Simulation pour un corps de masse plus importante que l'autre.
Le mouvement des deux corps peut se ramener à l'équation différentielle suivante, que l'on sait résoudre :

$$u''(\theta) + u(\theta) = \text{constante},$$

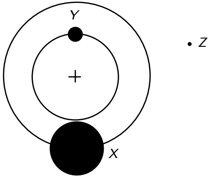
où (r, θ) sont les coordonnées polaires de l'une des deux masses, dans un repère centré au centre de masses, et $u = \frac{1}{r}$.
Trois types de trajectoires possibles : elliptique, parabolique, hyperbolique.



Le problème restreint des trois corps

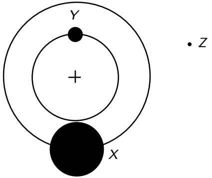
Le problème restreint des trois corps

On étudie trois planètes, X très lourde, Y lourde, et Z bien plus légère.



Le problème restreint des trois corps

On étudie trois planètes, X très lourde, Y lourde, et Z bien plus légère.

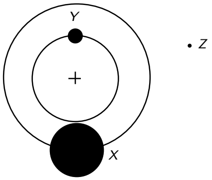


$$m_X X''(t) = -\frac{\partial U}{\partial X}, \quad m_Y Y''(t) = -\frac{\partial U}{\partial Y}, \quad m_Z Z''(t) = -\frac{\partial U}{\partial Z},$$

où $U = -\dfrac{m_X m_Y}{||X - Y||} - \dfrac{m_X m_Z}{||X - Z||} - \dfrac{m_Z m_Y}{||Z - Y||}$.

Le problème restreint des trois corps

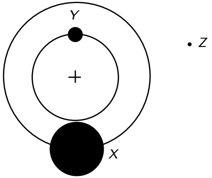
On étudie trois planètes, X très lourde, Y lourde, et Z bien plus légère.



Le rapport $\mu = \frac{m_Y}{m_X}$ des masses est petit.

Le problème restreint des trois corps

On étudie trois planètes, X très lourde, Y lourde, et Z bien plus légère.

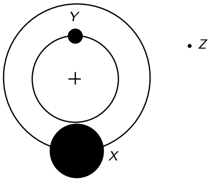


Le rapport $\mu = \frac{m_Y}{m_X}$ des masses est petit.

La planète Z se déplace dans le même plan que X et Y et n'influe pas sur leur mouvement.

Le problème restreint des trois corps

On étudie trois planètes, X très lourde, Y lourde, et Z bien plus légère.



Le rapport $\mu = \frac{m_Y}{m_X}$ des masses est petit.

La planète Z se déplace dans le même plan que X et Y et n'influe pas sur leur mouvement.

On cherche à connaître la position et la vitesse de Z dans ce plan, soit **4 inconnues**. L'*espace des phases* est donc de **dimension 4**.

La révolution conceptuelle avec Poincaré

La révolution conceptuelle avec Poincaré

On ne sait pas résoudre les équations différentielles régissant le mouvement de Z.

La révolution conceptuelle avec Poincaré

On ne sait pas résoudre les équations différentielles régissant le mouvement de Z.

Poincaré remarque qu'il n'y a pas besoin de résoudre les équations pour décrire le **comportement qualitatif, géométrique** des solutions.

La révolution conceptuelle avec Poincaré

On ne sait pas résoudre les équations différentielles régissant le mouvement de Z.

Poincaré remarque qu'il n'y a pas besoin de résoudre les équations pour décrire le **comportement qualitatif, géométrique** des solutions.

D'abord, il va simplifier le problème.

Poincaré rétrécit l'espace des phases

Poincaré rétrécit l’espace des phases

L’espace des phases est de dimension 4.

Poincaré rétrécit l'espace des phases

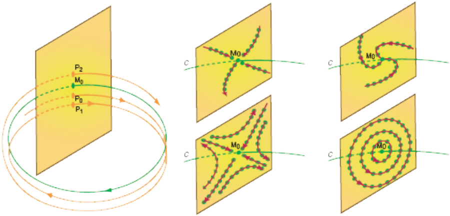
L'espace des phases est de dimension 4. Mais le Hamiltonien est constant le long des trajectoires. On étudie donc le système sur chaque **ensemble de niveau du Hamiltonien**, de dimension 3.

Poincaré rétrécit l'espace des phases

L'espace des phases est de dimension 4. Mais le Hamiltonien est constant le long des trajectoires. On étudie donc le système sur chaque **ensemble de niveau du Hamiltonien**, de dimension 3. Poincaré étudie les trajectoires périodiques, stables et instables, du système.

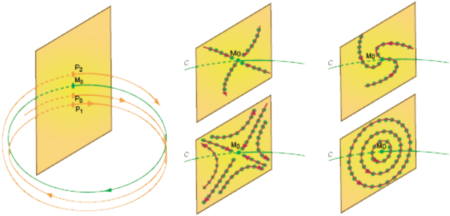
Poincaré rétrécit l'espace des phases

L'espace des phases est de dimension 4. Mais le Hamiltonien est constant le long des trajectoires. On étudie donc le système sur chaque **ensemble de niveau du Hamiltonien**, de dimension 3. Poincaré étudie les trajectoires périodiques, stables et instables, du système.
Il considère une surface orthogonale à une trajectoire périodique instable, une **section de Poincaré**, et étudie les retours des trajectoires proches de la trajectoire périodique sur cette surface.



Poincaré rétrécit l'espace des phases

L'espace des phases est de dimension 4. Mais le Hamiltonien est constant le long des trajectoires. On étudie donc le système sur chaque **ensemble de niveau du Hamiltonien**, de dimension 3. Poincaré étudie les trajectoires périodiques, stables et instables, du système.
Il considère une surface orthogonale à une trajectoire périodique instable, une **section de Poincaré**, et étudie les retours des trajectoires proches de la trajectoire périodique sur cette surface.

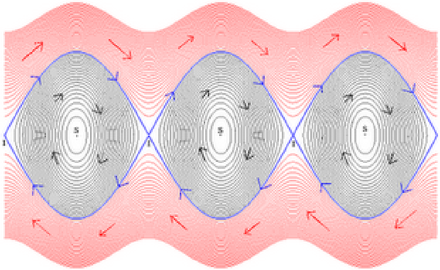


Il s'est ramené à un **problème de dimension 2 !**

Intersections homoclines

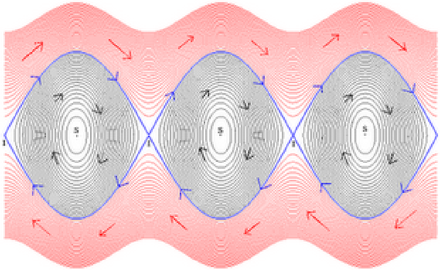
Intersections homoclines

Dans l'espace des phases du pendule simple, les **courbes homoclines** sont des ensembles de points à la fois négativement et positivement asymptotes au point d'équilibre instable.



Intersections homoclines

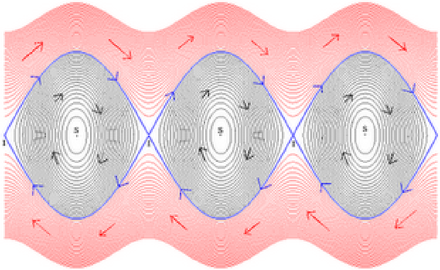
Dans l'espace des phases du pendule simple, les **courbes homoclines** sont des ensembles de points à la fois négativement et positivement asymptotes au point d'équilibre instable.



En général, appelons **courbe stable** l'ensemble des points dont la trajectoire est positivement asymptote à l'équilibre.

Intersections homoclines

Dans l'espace des phases du pendule simple, les **courbes homoclines** sont des ensembles de points à la fois négativement et positivement asymptotes au point d'équilibre instable.



En général, appelons **courbe stable** l'ensemble des points dont la trajectoire est positivement asymptote à l'équilibre.
De même, la **courbe instable** est l'ensemble des points dont la trajectoire est négativement asymptote à l'équilibre.

Intersections homoclines (II)

Intersections homoclines (II)

Dans l'exemple du pendule, ces courbes stable et instable sont confondues et forment une **courbe homocline** .

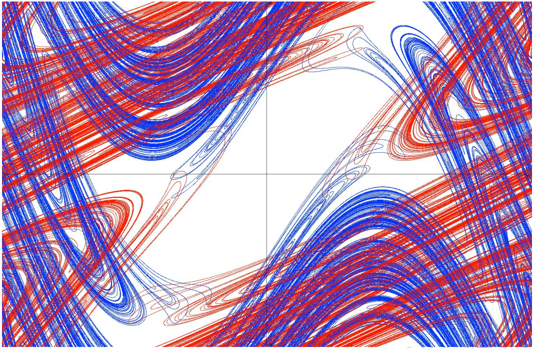
Intersections homoclines (II)

Dans l'exemple du pendule, ces courbes stable et instable sont confondues et forment une **courbe homocline** .

Dans le problème restreint des 3 corps, dans une section de Poincaré au voisinage d'une orbite périodique instable, Poincaré leur trouve un point d'intersection, donc croit (erreur !) qu'elles sont confondues. En fait, les intersections sont d'une complexité redoutable :

Intersections homoclines (II)

Dans l'exemple du pendule, ces courbes stable et instable sont confondues et forment une **courbe homocline** .
Dans le problème restreint des 3 corps, dans une section de Poincaré au voisinage d'une orbite périodique instable, Poincaré leur trouve un point d'intersection, donc croit (erreur !) qu'elles sont confondues. En fait, les intersections sont d'une complexité redoutable :



La suite au prochain épisode, le 8 février !