Groupe Math et Tice

math.tice@ac-amiens.fr

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

Académie d'Amiens
Février 2018
Auteur : francois.delannoy1@ac-amiens.fr

Le problème du mois de février 2018

(issu de la lettre TICE de février 2018)

<u>Quadrature d'un rectangle … troué !</u>

Les problèmes de quadratures ont pendant longtemps animé les mathématiciens.
A un tel point qu'en 1775, l'Académie des Sciences décida de ne plus expertiser les travaux traitant de la quadrature du cercle dont on était alors convaincu de l'impossibilité.

Quarrer une figure géométrique consiste à trouver une méthode de construction d'un carré ayant la même aire que la figure de départ, uniquement à l'aide de la règle non graduée et du compas.

Ce qui nous amène à notre problème du mois :

Peut-on quarrer un rectangle contenant un trou rectangulaire ?

Dans un premier temps, nous nous intéresserons au problème de la quadrature d'un rectangle « plein », puis nous en déduirons une méthode pour résoudre le cas du rectangle troué.

Ensuite nous aborderons la question de l'existence d'une méthode de découpage d'un tel rectangle.

Enfin, comme il en est désormais coutume, nous proposerons quelques pistes pédagogiques en présentant des activités connexes pouvant être aisément réalisées au collège et au lycée.

<u>Quadrature d’un rectangle « plein ». </u>(inspiré de la proposition de Marriane Fabre)

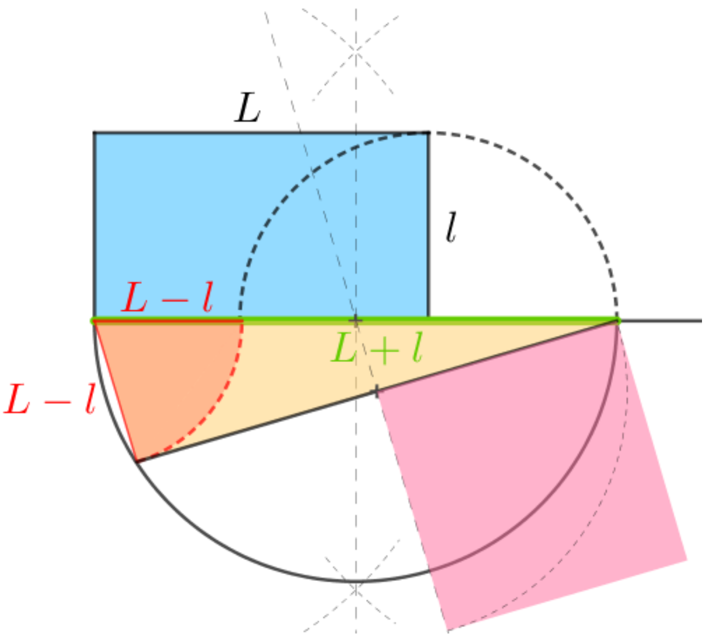
On considère un rectangle de largeur l et de longueur L. Quarrer ce rectangle revient à construire un carré dont le côté mesure $\sqrt{l \times L}$.

Pour cela, observons l’égalité suivante :
$(l + L)^2 - (L - l)^2 = 4lL$
d’où, $\sqrt{l \times L} = \frac{1}{2}\sqrt{(l + L)^2 - (l - L)^2}$

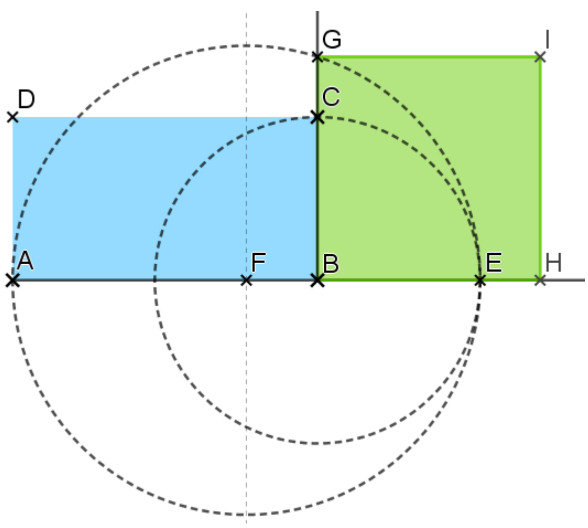
<u>Remarque :</u> Cette égalité peut se concevoir comme l’identité de polarisation d’une forme bilinéaire symétrique.

Cette égalité, laissant apparaitre une différence de deux carrés n’est pas sans nous rappeler le théorème de Pythagore.
En effet, il s’agira ici de construire la longueur de l’une des cathètes d’un triangle rectangle dont l’hypoténuse mesure $(l + L)$ et l’un des autres côtés mesure $(L - l)$.
Un tel triangle rectangle se construira grâce aux propriétés du cercle circonscrit à un triangle rectangle, ce qui impliquera de déterminer le milieu de l’hypoténuse.
Chacune de ces constructions sont évidemment réalisables à l’aide d’une règle non graduée et d’un compas.

<u>Remarque :</u> On appelle ici cathète d’un triangle rectangle l’un des côtés adjacents à l’angle droit.



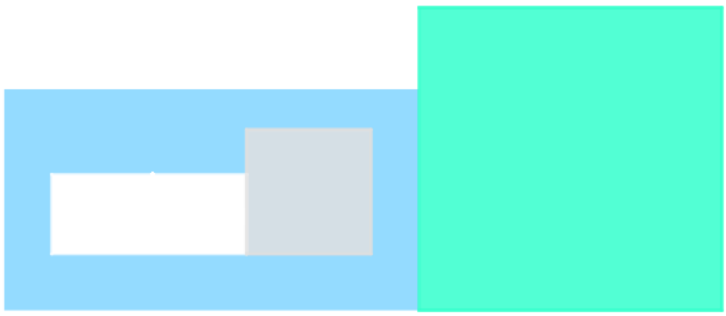
Euclide dans *livre 2* des *Eléments* (propriété XIV) nous propose également la construction suivante qui se révèle plus concise.



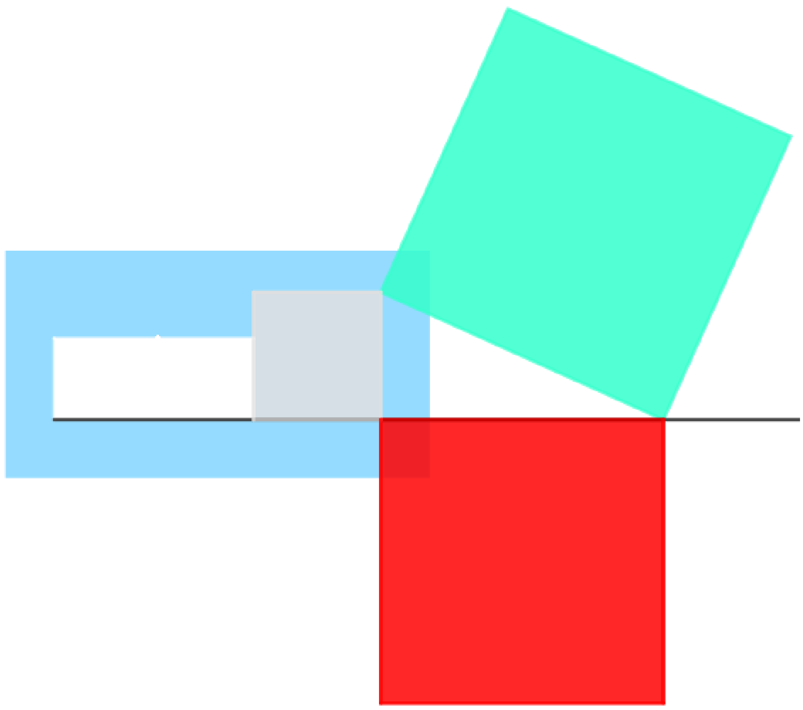
<u>Quadrature d’un rectangle « troué ».</u>

<u>Une première approche :</u>

Nous savons désormais construire un carré de même aire qu’un rectangle donné.
En ce qui concerne le cas du rectangle troué, il suffira d’effectuer les quadratures du rectangle et de son trou.



Une fois obtenu ces deux carrés, il ne restera plus qu’à en construire un troisième dont l’aire vaut la différence des deux précédents. Il s’agit de nouveau d’une situation familière nous évoquant le théorème de Pythagore.



Le carré rouge possède la même aire que le rectangle troué bleu.

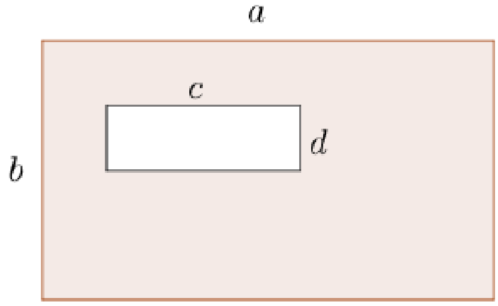
<u>Une seconde approche :</u> **(proposée par Lucas Gastaud)**

Les problèmes de construction à la règle et au compas sont des problèmes affiliés à l’algèbre des corps.
D’un point de vue historique, on observe que la démarche mathématique est une démarche collective de long terme.
Sur le plan didactique, différents cadres sont mêlés ce qui confère une grande richesse au problème.
On trouvera ci-après une solution détaillée nous apportant quelques éclaircissements sur la théorie des corps (sous-jacente à notre problème).
On notera également qu’une des originalités de cette solution est qu’elle fait usage du théorème de Thalès pour la construction de la longueur ab.

Construction à la règle et au compas : quarrer la couronne définie par deux rectangles inclus.

Problème : peut-on quarrer un rectangle contenant un trou rectangulaire ?

- On note a et b les dimensions du rectangle extérieur et c et d celles du rectangle intérieur.
- Sans réduction de généralité, on peut supposer que $a \geq b > 0$ et $c \geq d > 0$ avec $a \geq c$ et $b \geq d$.



1 Réduction du problème :

1.1 Heuristique :

Pour quarrer le rectangle de côté a et b, on souhaite construire la moyenne "en surface" de a et de b. Cette moyenne est appelée moyenne géométrique et correspond à la quantité $G(a,b) = \sqrt{ab}$.

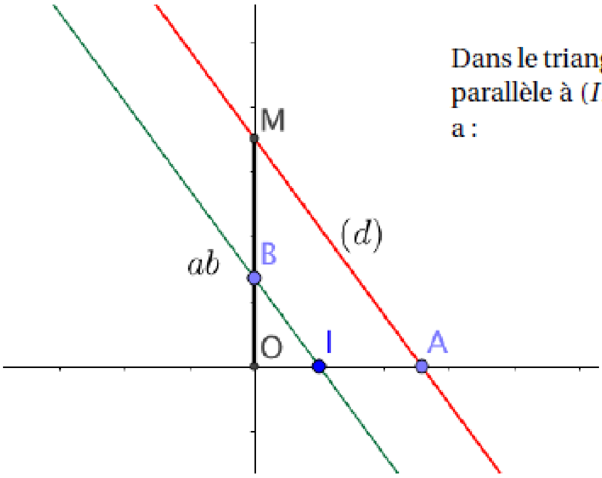
Preuve : $\sqrt{ab}^2 = ab$, *(ab est bien évidement positif).*■

Déterminer si le rectangle de dimensions a et b est quarrable est donc équivalent à déterminer si $\sqrt{ab}$ est constructible.

1.2 Construire le domaine "troué" si l'on sait quarrer un rectangle :

Le carré cherché a pour aire $ab - cd$ et donc pour côté $\sqrt{ab-cd}$, à partir de ab et de cd, il est facile de construire $ab - cd$. Il s'agit donc de construire ab si l'on sait construire a et b.

Le théorème de Thalès donne une solution à ce problème :
dans le dessin ci-dessous on a $B(0;b)$, $I(1;0)$, $A(a,0)$,
la droite (d) parallèle à (IB) coupe (OB) en $M(0; m = ab)$.



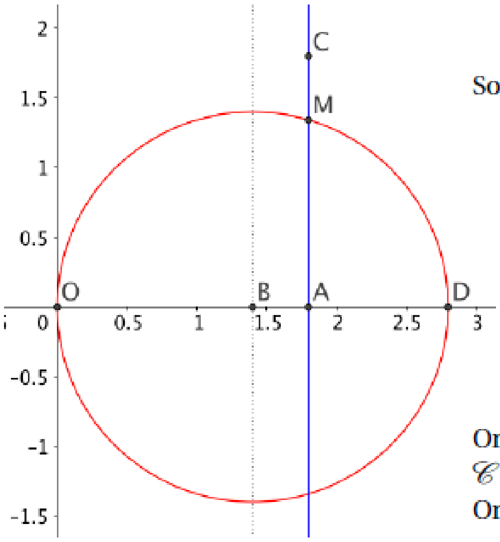
Dans le triangle AMO, $B \in [OM]$, $I \in [OA]$ et (d) est parallèle à (IB). D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OM}$$
$$\frac{1}{a} = \frac{b}{m}$$
$$m = ab$$

■

1.3 Construction de $\sqrt{ab-cd}$:

Nous savons construire maintenant à la règle et au compas $ab-cd$, pour construire $\sqrt{ab-cd}$, Il nous suffit d'utiliser le cercle $\mathscr{C}$ de centre $B(\frac{a+1}{2};0)$ de rayon $\frac{a+1}{2}$. *(L'équation d'un cercle est une relation quadratique, un bon choix du centre et du rayon permet de trouver la solution au problème...)*



$$(x-\frac{a+1}{2})^2+y^2=(\frac{a+1}{2})^2$$

Soit pour $x=a$

$$(\frac{a-1}{2})^2+y^2=(\frac{a+1}{2})^2$$
$$y^2=(\frac{a+1}{2})^2-(\frac{a-1}{2})^2$$
$$y^2=\frac{1}{4}(a+1+a-1)(a+1-a+1)$$
$$y^2=a$$

On construit $C(a;a)$, la droite (AC) coupe le cercle $\mathscr{C}$ au point $M(a,\sqrt{a})$.
On a donc $AM=\sqrt{a}$.

■

2 L'apport de la théorie des corps :

Constructibilité du rectangle extérieur : Le théorème de Wantzel (1837) donne une C.N.S de constructibilité d'un nombre $t\in\mathbb{R}$, il permet donc de s'assurer de la constructibilité de a et de b par exemple. Il permet aussi de répondre à la question sans faire de figure.

(Toutefois, il n'est pas nécessaire pour s'assurer de la constructibilité de $\sqrt{a}$ lorsque l'on sait construire a (voir **1.3***).)*

Théorème 2.1 *(Wantzel) $t\in\mathbb{R}$ est constructible si et seulement si il existe une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_p$, c'est-à-dire des sous-corps $\mathbb{L}_0,\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_p$ de $\mathbb{R}$ vérifiant :*

- $\mathbb{L}_0=\mathbb{Q}$
- $\forall i\in [\![0;p-1\mathbb{L}_{i+1}$ *est une extension quadratique de* $\mathbb{L}_i$
- $t\in\mathbb{L}_p$

Si l'on considère que les longueurs a et b sont déjà construites, on peut les reporter au compas. Cela revient à considérer comme corps de départ $\mathbb{Q}(a,b)$.

Si $\sqrt{ab}\notin\mathbb{Q}(a,b)$ alors on a la tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q}(a,b),\mathbb{Q}(a,b)/(X^2-ab)$ avec $\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}(a,b)/(X^2-ab)$.

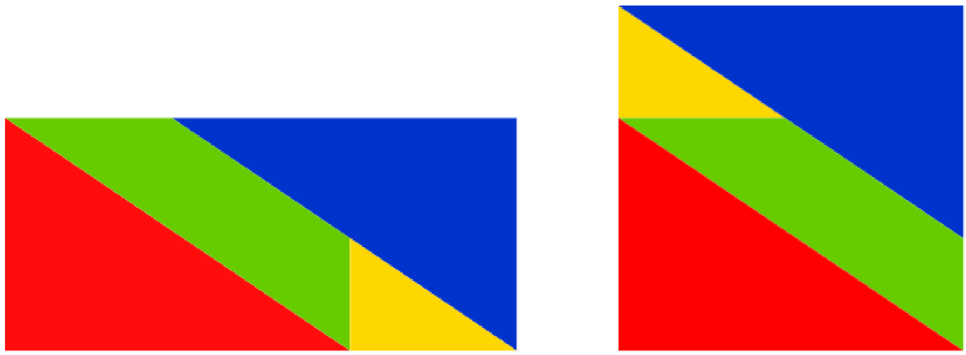
Cela signifie que $\sqrt{ab}$ est constructible à partir de la seule donnée des segments de longueurs a et b.

Découpages

Intéressons nous désormais à la réalisation du découpage de ces rectangles.

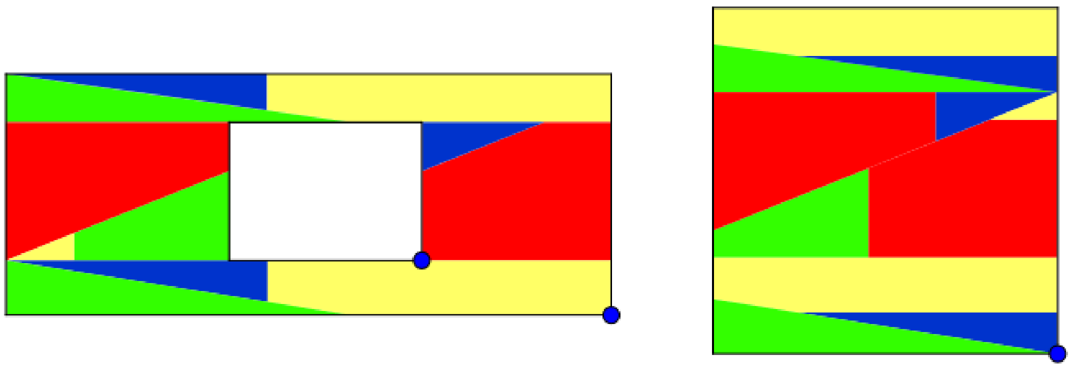
Découpage d’un rectangle

Voici une solution réalisable à la règle et au compas pour le cas d’un rectangle plein.

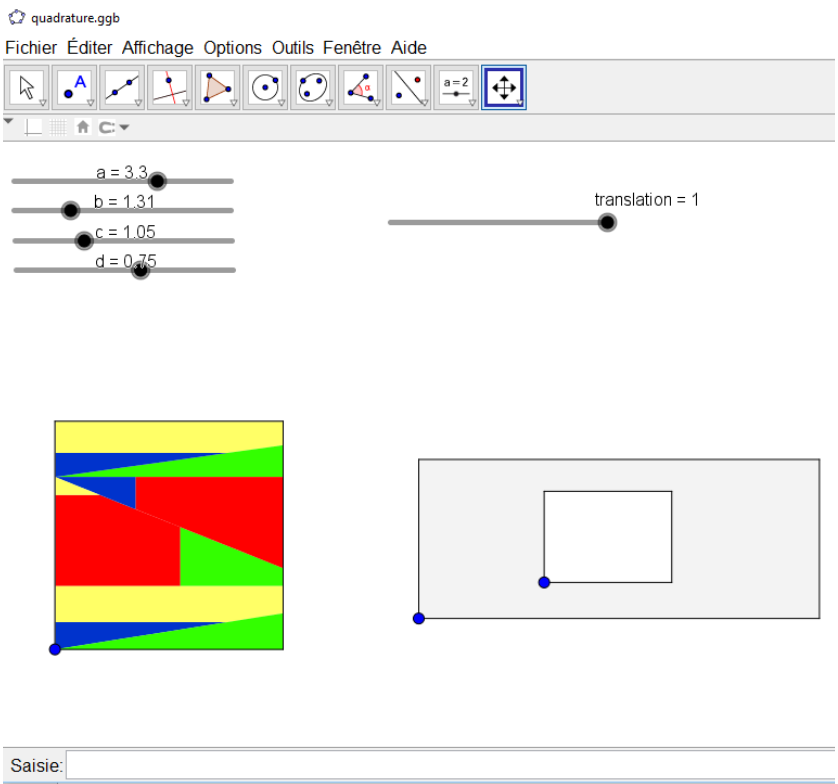


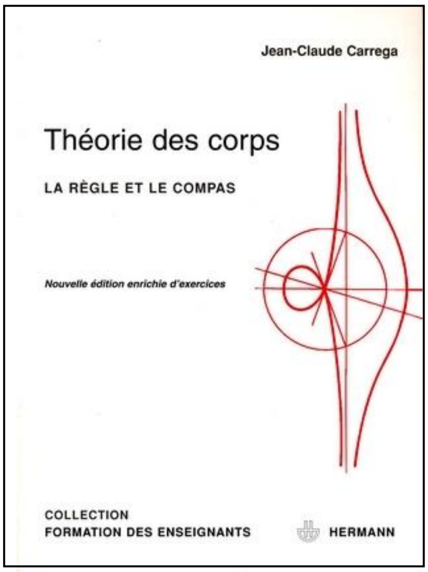
Découpage d’un rectangle troué

La méthode précédente permet de généraliser la solution dans le cas d’un rectangle troué.



On trouvera joint à ce document, un fichier Géogebra, permettant de visualiser et d’animer ce découpage.





<u>Pour aller plus loin …</u>

Théorie des corps – La règle et le compas.

Ce livre de *Jean-Claude Carrega* est un livre référence qui permet d'approfondir ses connaissances sur les problèmes de constructions à la règle et au compas. Au delà de l'aspect théorique qui peut parfois paraître abstrus, ce livre propose également de nombreuses solutions abordables à des problèmes de constructions et apporte des éclaircissements historiques.

Les questions fondamentales d'algèbre sont abordées ici à l'aide des premiers éléments de la géométrie, les notions algébriques étant introduites au fur et à mesure des besoins du raisonnement. Cette méthode prend appui sur des problèmes célèbres de la géométrie grecque et l'on voit ainsi combien artificiel est le cloisonnement parfois proposé entre algèbre et géométrie, et surtout combien il est erroné d'opposer mathématiques modernes et mathématiques anciennes.

L'ouvrage présente, avec leur traduction analytique ou algébrique permettant d'obtenir des théorèmes intéressants, un grand nombre de constructions : à la règle et au compas, au compas seul, à la règle seule, par pliages, à la règle accompagnée d'une équerre, d'un bissecteur ou d'un transporteur de distances, etc.

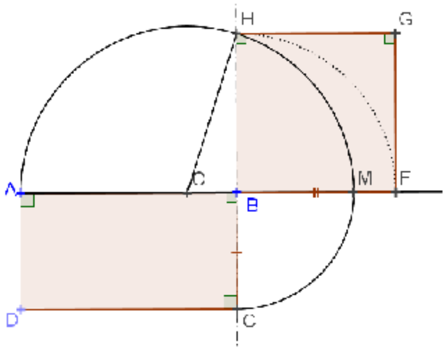
Le public de ce livre est très large : il comprend essentiellement les étudiants préparant le Capes ou l'agrégation, notamment l'oral, les étudiants de deuxième cycle et les professeurs de l'enseignement secondaire ; il intéressera d'une façon générale les mathématiciens de tous bords que passionne toujours la quadrature du cercle ou la duplication du cube.

<u>Dans nos classes.</u>

<u>Activité 1 :</u> La quadrature du rectangle

<u>Niveau :</u> lycée, fin de cycle 4

Le problème de la quadrature d'un rectangle évoqué dans la première partie de cet article ne fait appel qu'au théorème de Pythagore (si l'on considère la démonstration proposée par Euclide), ce qui le rend abordable dès le niveau 4è comme le suggérait en 2013 le scénario de notre collègue de l'académie d'Aix-Marseille <u>scénario quadrature</u>.



Présentation de l'activité

Réaliser la « quadrature d'une figure » consiste à construire un carré ayant la même aire que la figure donnée.
Dans Les <u>Eléments, livre 2, proposition XIV</u>, Euclide (300 av JC) propose un programme de construction pour réaliser la quadrature d'un rectangle, c'est-à-dire pour construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné.

- *ABCD est un rectangle tel AB est supérieur à BC.*
- *Sur la demi-droite [AB) placer le point M tel que BM = BC, en prolongeant le segment [AB].*
- *Appeler O le milieu de [AM], puis tracer un demi-cercle de centre O passant par A.*
- *La droite (BC) coupe le demi-cercle tracé en un point H.*
- *Le carré BHGF a la même aire que le rectangle ABCD.*

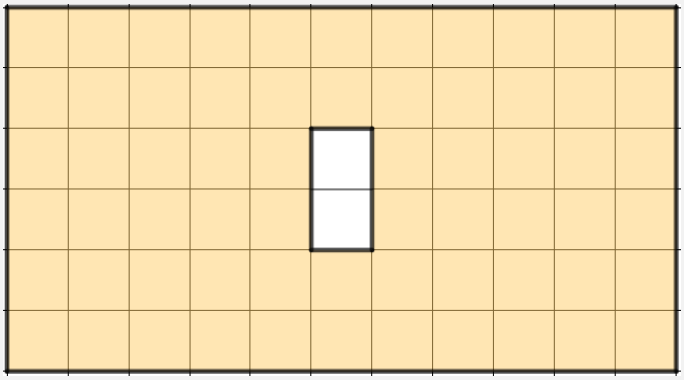
Le but du problème est de contrôler la méthode d'Euclide.

<u>Activité 2 :</u> Des puzzles et énigmes

<u>Niveau :</u> Cycle 3, Cycle 4

Enigme 1

Alex a besoin d'un bout de tissu carré de 64 cm² pour se confectionner un foulard. Il fouille dans une grande malle mais ne trouve que le morceau de tissu troué suivant :



→ Comment peut-il découper ce morceau de tissu troué pour obtenir le carré souhaité ?
→ Alex peut-il y parvenir en découpant ce morceau en deux parties uniquement ?

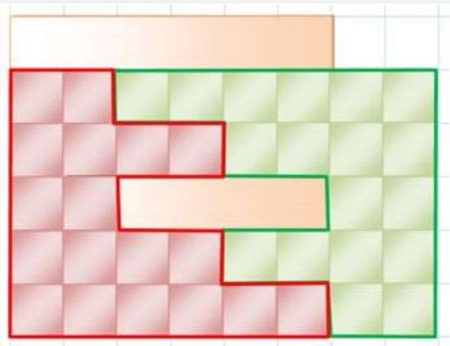
Au cours de cette activité, les élèves pourront travailler par groupes.
Au fil de leurs recherches, ils seront successivement amenés :

- à vérifier que la figure donnée possède une aire suffisante,
- à chercher la longueur du carré souhaité,
- à effectuer plusieurs découpages pour obtenir le plus optimal.

Afin de répondre à la seconde question, il pourra être utile d'orienter les élèves vers la solution en présentant un exemple de résolution dans un cas connexe.

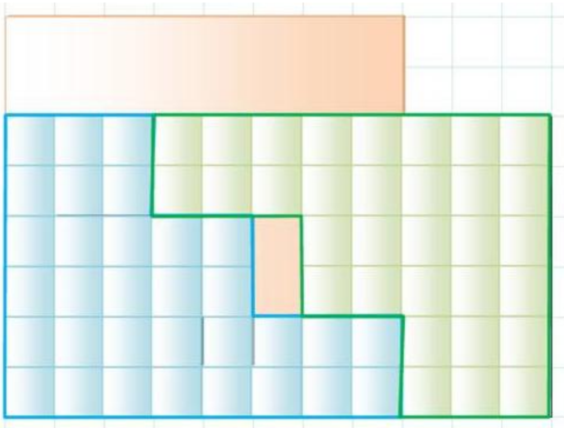
Piste 1

Younes, l'ami d'Alex, affirme qu'il est parvenu à fabriquer un carré à partir d'un rectangle troué en le découpant en deux parties. Voici la solution proposée par Younes :

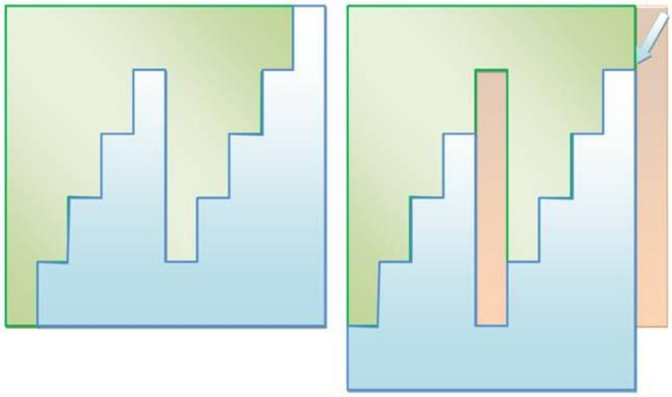


→ Vérifiez que la solution de Younes fonctionne.
→ Comment trouver une solution à notre problème initial, en s'inspirant de la méthode de Younes ?

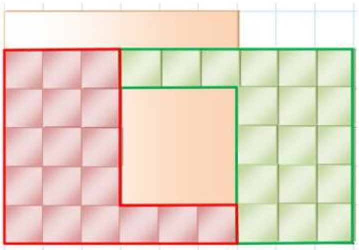
Solution :



Pour aller plus loin :



Un autre exemple :

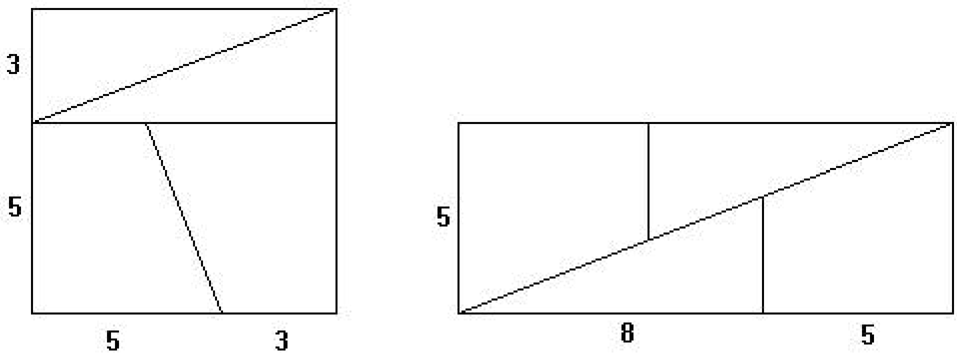


Activité 3 : Le problème de Lewis Carroll

Niveau : Troisième, Lycée

Yvan Monka, enseignant de mathématiques de l'académie de Strasbourg, nous présente un scénario intéressant traitant du paradoxe de Lewis Carroll (auteur de Alice au pays des merveilles). Lien du scénario.

- Construire un carré de côté 8 cm et découper ce carré comme indiqué sur la figure 1. Agencer les 4 pièces de manière à obtenir la figure 2.



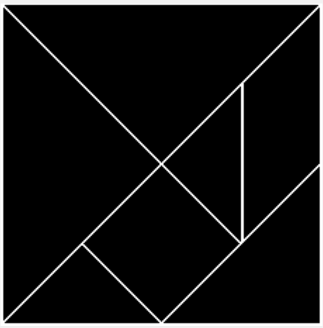
- Calculer l'aire de chacune de ces deux figures. Qu'observe-t-on ?

… Suite du scénario

<u>Activité 4 :</u> le Tangram

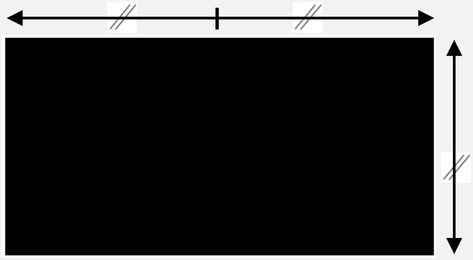
<u>Niveau :</u> Dès le cycle 3.

Le Tangram est un puzzle constitué de sept pièces de bois issues d'une dissection du carré.
Le jeu consiste à agencer les sept pièces afin de reproduire une figure donnée.

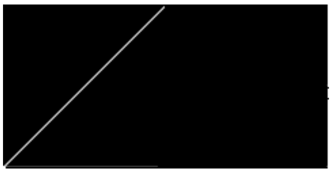


Défi 1

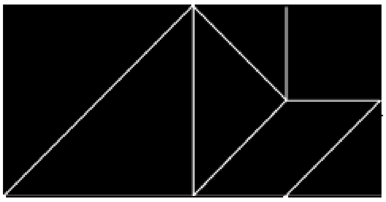
Agencer les pièces du Tangram afin de réaliser le rectangle ci-contre.



Afin d'orienter l'élève en difficulté, on pourra apporter quelques pistes :



<u>Une solution :</u>



<u>Pour aller plus loin :</u>

Dès la 4ème, on pourra demander aux élèves d'approfondir leurs recherches en proposant le problème suivant :

Le côté du carré initial mesurant 16 cm, quelles sont les dimensions du rectangle ?

<u>Jouer aux mathématiques en classe :</u>

Dans un premier temps, il peut être intéressant de faire construire aux élèves leur propre jeu de Tangram avant de les mettre en activité de recherche autour d'un jeu.

En effet, le Tangram peut également se dérouler en battle. Les élèves deux par deux, disposeront chacun d'un Tangram et d'une carte à reproduire le plus rapidement possible en utilisant les sept pièces. On pourra distinguer des cartes de niveaux de difficulté différents.