Épreuve pratique de mathématiques

Printemps 2009

Fiches-élève

Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

1. (a) En utilisant un tableur ou une calculatrice, donner les 40 premiers termes de cette suite.
   (b) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (n, u_n).
   (c) En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

2. On cherche à déterminer une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.
   (a) Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $\dfrac{1}{u_n - 1}$ pour les 40 premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

3. Démontrer la formule conjecturée.

Production demandée

– Visualisation à l'écran du tableau de valeurs et du nuage de points.
– Démonstration.

Étude d'une courbe de Bézier

Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A de coordonnées $(0\,;6)$, B de coordonnées $(2\,;\,0)$ et C de coordonnées $(4\,;\,6)$.
Soit t un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$. On définit les points :
– G barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1-t), (B; t)\}$;
– H barycentre du système de points pondérés $\{(B; 1-t), (C; t)\}$;
– M barycentre du système de points pondérés $\{(G; 1-t), (H; t)\}$.
Le but de l'exercice est d'étudier le lieu des points M quand t décrit l'intervalle $[0; 1]$, et la position de cet ensemble par rapport aux droites (AB) et (BC).

Partie A

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
   Tracer les droites (AB) et (BC), puis faire apparaitre le lieu décrit par le point M lorsque t varie.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer le lieu du point M.
2. Quelle semble être la position des droites (AB) et (BC) par rapport au lieu obtenu ?
3. Sur quelle courbe semble se déplacer le point M ?

   Appeler l'examinateur pour annoncer les conjectures et décrire la démarche.

Partie B

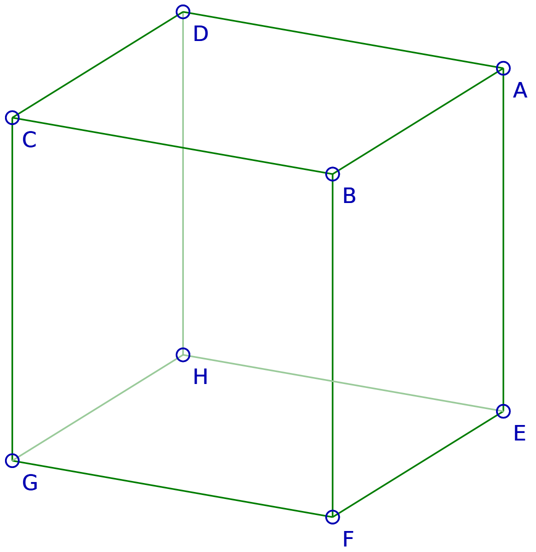
4. Déterminer en fonction de t les coordonnées des points G, H et M.
5. Valider ou invalider la conjecture émise à la question 3.
   Donner l'expression analytique du lieu du point M.

Production demandée

– Visualisation du lieu du point M.
– Énoncé des conjectures : courbe décrite par le point M et position des droites (AB) et (BC) par rapport à cette courbe.
– Réponses pour les questions 4. et 5.

Lieu géométrique de points dans l'espace

Énoncé



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$, on considère le cube ABCDEFGH reproduit ci-contre. On note I le centre de la face EFGH et J le milieu du segment [IF].
Pour tout réel m de l'intervalle $[0; 1]$, on note M le barycentre des points pondérés suivants $(E; m)$, $(F; 2m)$, $(G; m)$, $(C; 4-4m)$.
Le but de l'exercice est de trouver le lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0; 1]$.

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, construire le cube ABCDEFGH ainsi que les points I et J.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la figure construite.

   (b) Construire le point M barycentre du système de points pondérés $(E; m)$, $(F; 2m)$, $(G; m)$, $(C; 4-4m)$ pour $m \in [0; 1]$.

   (c) Émettre une conjecture quant au lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0; 1]$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture faite.

2. (a) Démontrer que les points M, F, I et C sont coplanaires.

   (b) Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CJ}$.

   (c) Conclure alors quant au lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0; 1]$.

Production demandée

- Construction de la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Énoncé de la conjecture.
- Relation et démonstrations demandées dans la question 2.

Suite définie par une sommation

Énoncé

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture.

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :
   (a) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-3}$;
   (b) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-5}$.

   Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question 1 ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des résultats et de l'interprétation.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $x_n = v_n + \dfrac{1}{n}$.
   À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (x_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (x_n).
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture et pour proposer une démarche pour la question 4.

4. (a) Démontrer la conjecture émise à la question 3.
   (b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

Production demandée

– Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (x_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
– Obtention des valeurs de n_0 à la question 2.
– Réponses argumentées pour la question 4.

Distance minimale d'un point à une courbe

Énoncé

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction logarithme népérien.
On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt $\mathscr{C}$. Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le ou les point(s) M, s'il en existe, situé(s) sur $\mathscr{C}$ et rendant cette distance minimale.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure permettant d'explorer cette situation.
2. Cette distance semble-t-elle minimale pour un (ou plusieurs) point(s) particulier(s) de $\mathscr{C}$? Si oui donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette plus petite distance et de l'abscisse de ce(s) point(s).

   Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et des conjectures émises.

3. Tracer la droite (OM) ainsi que la tangente en M à la courbe $\mathscr{C}$. Que semble-t-il se passer lorsque M est positionné sur la courbe $\mathscr{C}$ de sorte que la distance OM soit minimale ?

   Appeler le professeur pour une vérification de la conjecture.

Partie B

4. Quelle relation doit vérifier l'abcisse x_0 d'un point M_0 en lequel la distance OM est minimale ?

   Appeler le professeur pour lui présenter la méthode envisagée et une vérification de la relation éventuellement obtenue.

5. Prouver la conjecture élaborée dans la question 3.

Production demandée

– Les différentes étapes des stratégies prévues pour répondre aux questions 4. et 5.
– La mise en forme de l'une de ces étapes.

Intersection de tangentes

Énoncé

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g.
Pour tout réel a , on note :
- A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A,
- B le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et T_B la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B,
- M $(x_M\ ;\ y_M)$ le point d'intersection des tangentes T_A et T_B.

On souhaite étudier le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point M lorsque a varie dans $\mathbf{R}$.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
   (a) Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que les tangentes T_A et T_B.
   (b) Construire le point M.
   Appeler l'examinateur pour valider la figure, ou en cas de difficultés.
   (c) En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de a, dire quelle relation semble exister entre les réels a et x_M .
   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.
2. Tracer le lieu $\mathscr{L}$ du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative $\mathscr{E}$ d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?
   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie B

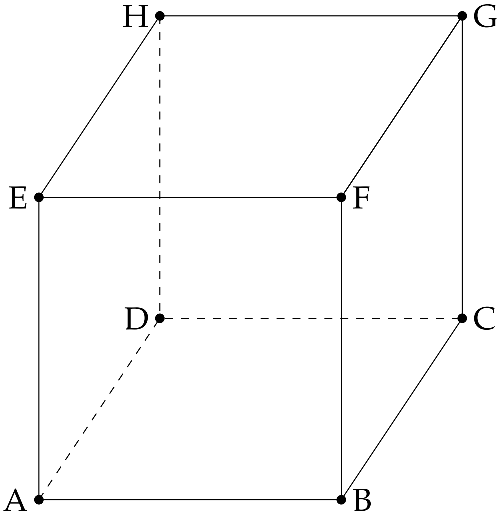
3. Démontrer que $\mathscr{L}$ fait effectivement partie de $\mathscr{E}$. Que dire de plus ?

Production demandée

- Courbes demandées aux questions 1 et 2.
- Réponse à la question 3.

Volume d'un tétraèdre

Énoncé



On considère un cube de l'espace, formé par ses sommets ABCDEFGH (voir figure ci-contre). Sur la demi-droite [AE) on considère un point variable K.
Le but de l'exercice est de rechercher une position du point K, pour laquelle le volume du tétraèdre BDGK est égal à la moitié du volume du cube.

1. À l'aide d'un logiciel représenter un cube ABCDEFGH.
   Placer un point K variable sur la demi-droite [AE).

   Appeler l'examinateur en cas de difficulté

2. Pour quelle position du point K le volume du tétraèdre BDGK semble-t-il être égal à la moitié de celui du cube ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la position du point K trouvée.

3. En supposant que K occupe la position trouvée à la question 2., conjecturer la nature des triangles KGB et KDG à l'aide du logiciel.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures faites.

4. Démontrer que lorsque le point K occupe la position trouvée à la question 2., le volume du tétraèdre BDGK est bien la moitié du volume du cube.

Production demandée

– Affichage des valeurs numériques nécessaires pour émettre la conjecture de la question 2.
– Éléments de preuve pour la question 4.

Recherche d'un point fixe

Énoncé

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle OO′A de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme O en O′ et on désigne par M′ le point image de M par la similitude S. On cherche à prouver que la droite (MM′) passe par un point fixe.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire la figure associée à la situation décrite ci-dessus.
2. Construire l'image $\mathscr{C}'$ du cercle $\mathscr{C}$ par la similitude S. Caractériser cet ensemble $\mathscr{C}'$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre pour la droite (MM′) lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

   On appelle A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
4. On pose S(B) = B′. Quelle propriété relative est vérifiée par les triangles ABB′ et AOO′ ? Justifier.
5. Positionner le point M afin que le point B soit entre les points M et M′.
6. Donner des arguments mathématiques permettant de prouver que les points M, B et M′ sont alignés.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

Production demandée

- La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La caractérisation de l'ensemble $\mathscr{C}'$.
- La justification de la propriété de la question 4.
- La justification de la conjecture de la question 3. seulement dans le cas où le point B est entre les points M et M′.

Suites, approximation d'un réel

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$b_n = \frac{25}{a_n^2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, de a_n et de b_n, pour n entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n), la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 0$, par $c_n = a_n^3$.
   Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n, pour n variant de 0 à 20.
   Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n).
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n).

Appeler l'examinateur

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $b_n^3 \leqslant 25 \leqslant a_n^3$.
   Après avoir vérifié que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

Appeler l'examinateur pour lui donner la réponse attendue.

7. On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n).
   En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels ℓ et ℓ'.

Appeler l'examinateur

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n, b_n et c_n, pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n).
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.

Aire variable d'un triangle

Énoncé

Soit un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x - 1$.

Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1, et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, a étant un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

On s'intéresse à l'aire du triangle OAB et à la variation de cette aire en fonction de a.

Partie A

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pou rlui présenter la figure construite.

2. Afficher à l'écran l'aire du triangle OAB.
   En faisant varier a, chercher une valeur approchée de la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle OAB est maximale. Donner une valeur approchée de cette aire maximale.

   Appeler l'examinateur pour lui exposer la conclusion.

3. Pour tout a dans l'intervalle $[0;1]$, on note $f(a)$ l'aire du triangle OAB. Construire l'ensemble des points M$(a\,;f(a))$. Retrouver les résultats de la question précédente.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la courbe obtenue et lui proposer la démarche envisagée pour la question suivante.

Partie B

4. (a) Déterminer l'expression de $f(a)$ en fonction de a.

   (b) En étudiant la fonction f, déterminer la valeur exacte de la variable a pour laquelle la fonction f atteint son maximum et la valeur exacte de ce maximum.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la figure demandée et de l'ensemble des points M de la question 3.
- Affichage des valeurs approchées de a et de $f(a)$ pour lesquelles l'aire du triangle est maximale.
- Démarches et réponses argumentées à la question 4.

Optimisation en géométrie plane

Énoncé

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point M de $\mathscr{C}$ tel que la distance de M à la droite D soit minimale.

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.
2. Placer un point mobile M sur $\mathscr{C}$ et construire le point N image de M par la projection orthogonale sur D.
3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point M_0 de $\mathscr{C}$ dont la distance à D est minimale.
   Proposer une valeur approchée de cette distance minimale.
   Conjecturer une propriété de la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les constructions, la valeur approchée et les conjectures.

Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la méthode.

5. Calculer les coordonnées de M_0 et sa distance à D.

Production demandée

- Construction de $\mathscr{C}$, D, M et N au moyen du logiciel de géométrie.
- Conjectures relatives à l'abscisse de M_0 et à la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.
- Proposition d'une valeur approchée de la distance de M_0 à D.
- Calcul des coordonnées de M_0 et de sa distance à D.

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Énoncé

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9. Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante. Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.
   (a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
⋮	⋮			
1001	1000			

Appeler l'examinateur pour vérifier la feuille de calcul.

   (b) Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.
   (c) À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

2. On souhaite faire varier la valeur de a.
   (a) Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a.
   (b) Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.
   (a) Déterminer l'espérance de X en fonction de a.
   (b) Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?
   (c) Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la Partie A.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
– Réponses argumentées pour les questions posées en 3.(a), 3.(b) et 3.(c).

Propriétés de la courbe représentative d'une fonction

Énonce

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit a un réel quelconque, M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de votre choix.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

2. Faire varier a et émettre des conjectures concernant respectivement :
   - la droite (MN) ;
   - le lieu du point I intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N.

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

3. On se propose d'étudier les conjectures émises à la question précédente.
   (a) Déterminer en fonction de a les coordonnées des points M et N.
   (b) Justifier les conjectures émises à la question 2.

Production demandée

- Visualisation à l'écran du lieu du point I.
- Réponses argumentées aux questions 3.(a) et (b) .

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet **4** diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{2}$;
- le quotient $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $\alpha_n = 2^n q_n$.

   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

   (b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de α_n et la somme des inverses des diviseurs de α_n. Que peut-on conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour vérification des valeurs et présentation de la conjecture.

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.

   (a) Donner la liste des diviseurs de α_n en fonction de q_n.

   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de α_n vaut 2 ?

   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.

Étude d'un ensemble de points

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

On pose $a_0 = 4 + 2i$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, et on note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.

   (b) Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les calculs et le graphique réalisés.

2. Soit J le point d'affixe i. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $d_n = JA_n$.

   (a) Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.

   (b) Représenter le nuage des points de coordonnées (n, d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

   (c) Conjecturer la nature de la suite (d_n).

   Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé.
   Lui proposer des conjectures relatives à la suite (d_n).

Partie B

3. (a) Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.
   Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.

   (b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Étudier sa convergence.

   (c) Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question 1.(b).

Production demandée

- Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
- Réponses argumentées pour la question 3.

Équation avec un paramètre

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation (E) : $\dfrac{x}{(2\ln x+1)^2}=mx$, où m est un paramètre réel.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{(2\ln x+1)^2}$ et la droite (d) d'équation $y=mx$.
Conjecturer alors le nombre de solutions de l'équation (E).

   Appeler l'examinateur pour lui montrer le graphique et répondre à la question posée.

   (b) Dans cette question, m est un entier naturel non nul. On note a_m la plus petite des solutions de l'équation (E) et b_m, la plus grande. On s'intéresse aux suites (a_m) et (b_m).
Conjecturer, à l'aide du logiciel, les variations et la convergence de ces deux suites.
Que peut-on dire de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

Partie B

2. (a) Calculer les expressions de a_m et b_m, en fonction de m.
   (b) Justifier le sens de variation de la suite (b_m).
   (c) Calculer la limite de cette suite.

Production demandée

– Visualisation à l'écran des représentations graphiques.
– Conjectures demandées.
– Réponse écrite et orale à la question 2.

Limites d'intégrales

Énoncé

Pour un entier naturel n non nul, on considère le nombre I_n défini par l'intégrale :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x.$$

On cherche à déterminer la limite éventuelle de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la courbe représentative de la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

2. Faire varier n. Quand n devient très grand, quelle est l'allure de la courbe représentative de f_n ?
3. Essayer alors de conjecturer une valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

Appeler l'examinateur pour présenter la conjecture.

Partie B

4. Calculer une primitive de f_n sur $[0; 1]$ et en déduire la valeur exacte de I_n.

Appeler l'examinateur pour une vérification.

5. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
6. En déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

Production demandée

- Les représentations graphiques de la question 1.
- La rédaction des questions 5. et 6.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$\mathrm{U}_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \cdots, \mathrm{U}_{30}$.
2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– La démonstration de la question 4 .

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On construit deux suites (x_n) et (y_n) de la manière suivante :

Initialisation : $x_0 = 10$, $y_0 = 0$

Récurrence : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n). L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel adapté.

Partie A

1. Placer dans un repère orthonormal adapté les points M_k pour k compris entre 0 et 30.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la figure.

2. Une transformation du plan envoie M_0 sur M_1, M_1 sur M_2 et en général M_k sur M_{k+1}. Formuler une conjecture relative à la nature de cette transformation. En admettant que cette conjecture est vérifiée, essayer de préciser **au moins deux** des caractéristiques de cette transformation à partir de la figure affichée.

   Appeler l'examinateur pour lui proposer la conjecture et certains détails concernant cette transformation.

Partie B

3. On note z_n l'affixe du point M_n.
   En établissant une relation entre z_{n+1} et z_n de la forme $z_{n+1} = a.z_n$, démontrer les conjectures précédentes. On pourra chercher le module et l'argument de a^2.

Production demandée

– Réalisation de la figure demandée à l'aide du logiciel.
– Démonstration des conjectures relatives à la transformation.

Suites et fonctions

Énoncé

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
   (a) les variations de f_n.
   (b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$.
   (a) Conjecturer, pour tout $x \geqslant 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n), et de leur convergence éventuelle ?
   (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   (b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   (c) Que peut-on en déduire ?

   Appeler l'examinateur pour vérification.

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).

Étude de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
On se propose d'établir une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.

1. (a) Représenter la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide d'un outil de géométrie dynamique.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g = f \circ f$ puis conjecturer une expression simple de $g(x)$, pour tout x appartenant à $[0;1]$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des constructions et de la conjecture émise.

2. (a) Placer un point M sur la courbe $\mathscr{C}$, puis construire le point M′ symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
   (b) Quel semble être le lieu du point M′ lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}$?
   (c) Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}$ peut-on alors conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des constructions et des observations faites.

3. (a) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, exprimer $f \circ f(x)$ en fonction de x.
   (b) En déduire la propriété de la courbe $\mathscr{C}$ observée à la question 2.(c).

Production demandée

- Réalisation du graphique et construction pour observation du lieu du point M′.
- Démarche de démonstration pour les questions 3.(a) et 3.(b).

Recherche d'une stratégie de jeu

Énoncé

On dispose de trois urnes, notées A, B et C, contenant chacune 10 jetons indiscernables au toucher :
– l'urne A contient 4 jetons noirs et 6 jetons blancs
– l'urne B contient 7 jetons noirs et 3 jetons blancs
– l'urne C contient 6 jetons noirs et 4 jetons blancs.
Le jeu consiste à extraire successivement un jeton dans chacune des trois urnes, le joueur pouvant choisir d'effectuer ces tirages soit dans l'ordre A puis B puis C soit dans l'ordre A puis C puis B.
Lorsque le jeton extrait de la 2^e urne est d'une couleur différente de celui de la 1^{re}, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.
Lorsque le jeton extrait de la 3^e urne est d'une couleur différente de celui de la 2^e, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

La partie est gagnée si le total des points marqués est égal à 2.
On se propose d'étudier si l'un des deux ordres de tirages proposés est plus favorable au joueur que l'autre.

1. (a) À l'aide d'un tableur, simuler 500 parties de ce jeu, en choisissant l'ordre A puis B puis C, et afficher la fréquence des parties gagnées.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul.

   (b) Compléter la feuille de calcul par la simulation de 500 parties réalisées dans l'ordre A puis C puis B, et afficher la fréquence des parties gagnées.

   (c) Réaliser ainsi 10 simulations de 500 parties dans chacune des deux stratégies de jeu envisagées et compléter le tableau par la fréquence des parties gagnées, exprimée sous forme décimale approchée à 0,01 près.

Simulation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Première stratégie										
Deuxième stratégie										

   Les résultats obtenus permettent-ils de conjecturer si l'une des deux stratégies de jeu envisagées est plus favorable que l'autre pour le joueur ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul et lui proposer une conjecture.

2. Déterminer la probabilité de gagner une partie en appliquant l'une ou l'autre des stratégies de jeu. La conjecture émise est-elle validée ?

Production demandée

– Réalisation de la simulation.
– Réponse argumentée à la question 2.

Étude d'une figure du plan

Énoncé

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment [BC]. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F. Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A′, symétriques de G et A par rapport à la droite (BC). On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.
On se propose d'étudier la nature du triangle HIJ quand D décrit le segment [BC].

1. (a) Représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   (b) Quelle semble être la nature du triangle HIJ ?

   (c) Visualiser les lieux des points I et J lorsque le point D décrit le segment [BC].

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.
   Lui proposer les conjectures émises concernant le triangle HIJ
   et les lieux des points I et J.

2. On définit les similitudes directes S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et S_2, de centre B, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et leur commposée $f = S_2 \circ S_1$.

   (a) Déterminer les images de J et H par f.

   (b) Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f.

   (c) En déduire la nature du triangle HIJ.

Production demandée

– Réalisation de la figure.
– Réponse argumentée à la question 2.

Suites définies conjointement

Énoncé

Soit a un nombre réel non nul. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = -\frac{3}{4}a$$
$$U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n + 4V_n) \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{5}(3U_n + 2V_n)$$

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer et représenter graphiquement les 30 premiers termes de chacune de ces suites pour diverses valeurs du réel a.
   (b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n). Cette limite dépend-elle de la valeur du réel a ?
   (c) Mêmes questions pour la suite (V_n).

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

2. Il s'agit maintenant de conjecturer la possibilité pour la suite (U_n) d'être arithmétique ou géométrique.
   (a) Adapter la feuille de calcul pour aider à effectuer une conjecture sur la nature de (U_n).
   (b) Procéder de même pour conjecturer la nature de la suite (V_n).
   (c) On considère la suite (W_n) définie par $W_n = 3U_n + 4V_n$. Adapter la feuille de calcul précédente pour conjecturer une propriété de la suite (W_n).

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie les conjectures sur la nature de chaque suite.
   Lui indiquer comment il est possible de démontrer la conjecture relative à la suite W_n.

Partie B

3. (a) Démontrer la conjecture relative à la suite (W_n).
   (b) En déduire U_{n+1} en fonction de U_n puis la limite de la suite (U_n).

Production demandée

– La feuille ou le procédé de calcul construit permettant les conjectures des questions 1. et 2.
– La démonstration de la question 3.(b).

Cryptage et décryptage d'un message

Énoncé

Préliminaire : *on se réfère dans ce sujet à un langage de programmation capable de traiter des nombres entiers et des caractères, ce qui est le cas de la plupart des langages y compris ceux que fournissent certaines calculatrices programmables. En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère un code numérique qui est un entier compris entre 0 et 255. Ainsi, le code de @ vaut 64, celui de A est 65, etc.*

Questions de syntaxe : *dans la plupart des langages de programmation il existe une fonction appelée* `chr()` *ou* `char()` *ou* `car()` *et qui renvoie un caractère à partir de son code ASCII. On entre donc par exemple* `chr(65)` *pour obtenir la lettre A. La fonction réciproque est souvent nommée* `asc()` *ou* `ord()`*, de sorte qu'on tape* `ord("A")` *ou* `asc('A')` *(selon le langage) pour obtenir le nombre 65.*

Pour simplifier ce qui suit, *nous conviendrons de nous limiter à un sous-alphabet formé des lettres majuscules de A à Z et du caractère @ pour marquer les espaces. Dans ces conditions, la formule* `ord(c)-64` *renvoie un nombre compris entre 0 et 26 si la variable* `c` *contient une lettre de notre mini-alphabet.*

1. **Codage.**
   (a) En utilisant le codage décrit ci-dessus, coder le message suivant :

   BONJOUR@A@TOUS

   On définira un tableau pour ranger les lettres et un autre pour le codage du message.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer l'écran du logiciel après remplissage.

   (b) On va crypter (chiffrer) le message au moyen de la fonction C qui, à tout n entier appartenant à $[0;26]$ associe le reste $C(n)$ de la division de $13n$ par 27. Adapter la procédure réalisée en 1.(a) pour obtenir les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n, puis en déduire la lettre correspondante.

   Appeler l'examinateur pour validation des résultats.

2. **Décodage.** Notons D la fonction qui, à tout entier k appartenant à $[0;27]$, associe le reste de la division de $25k$ par 27. À partir des nombres cryptés trouvés précédemment, retrouver le message originel en utilisant la fonction D.

   Appeler l'examinateur pour vérification du résultat.

3. **Amélioration.** Le codage proposé ci-dessus est rudimentaire, notamment parce que le caractère d'espacement @ est invariant. On modifie donc la fonction C ainsi : $C(n)$ = reste de la division de $13n+8$ par 27. Comment faut-il modifier la fonction D ?

   Appeler l'examinateur pour lui proposer une réponse éventuelle à cette question.

4. **Justification du codage.** Pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts. Il faut donc s'assurer que le cryptage choisi au 1.(b) code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 26, par deux nombres distincts.
   (a) Montrer que, si $C(n) = C(p)$ alors 27 divise $13(n-p)$.
   (b) En déduire que $n = p$ puis que le codage est valide.

Production demandée

– Écrire le message codé et le message décodé.
– Justifications demandées aux questions 4.(a) et 4.(b).

Épreuve pratique de mathématiques

Printemps 2009

Fiches-professeur

Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_1 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

1. (a) En utilisant un tableur ou une calculatrice, donner les 40 premiers termes de cette suite.

   ☞ ***Remarques sur les outils.***
   Avec certaines calculatrices, l'élève devra demander le calcul des termes de la suite avec un décalage de rang, à savoir $w_n = u_{n-1}$.
   Les professeurs doivent être conscients des difficultés supplémentaires que cela peut apporter lors de la réalisation de l'épreuve. Dans ce cas, l'examinateur sera attentif aux difficultés que l'élève peut rencontrer lors de cette étape et il interviendra rapidement pour lui donner toutes les indications utiles, sans pénalisation.

   (b) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées (n, u_n).

   ☞ *Même s'il n'y a pas d'appel dans le sujet, l'examinateur vérifiera que l'élève sait utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer les termes d'une suite ou pour représenter graphiquement le nuage des premiers termes de cette suite. Il donnera toutes les indications utiles à un élève qui n'y parviendrait pas.*

   (c) En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures.

   ☞ *L'observation du nuage de points peut conduire à formuler différentes conjectures : sens de variation, convergence, majorant, minorant, ... On attend ici des réponses orales.*

2. On cherche à déterminer une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.

   (a) Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $\dfrac{1}{u_n - 1}$ pour les 40 premiers termes de la suite (u_n).

   ☞ *Comme déjà expliqué, certaines calculatrices obligeront à étudier en fait la suite $z_n = \dfrac{1}{u_{n-1} - 1}$.*

   (b) Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

☞ *Si la formule de calcul est bien transcrite, la conjecture de l'expression explicite de* $\frac{1}{u_n - 1}$ *est immédiate, l'élève en déduira celle relative à* u_n *par un calcul simple à la main.*

3. Démontrer la formule conjecturée.

☞ *On valorisera la reconnaissance par l'élève d'une situation relevant d'un raisonnement par récurrence et sa connaissance du schéma d'un tel raisonnement.*

Production demandée

– Visualisation à l'écran du tableau de valeurs et du nuage de points.
– Démonstration.

Compétences évaluées

– Faire calculer les termes d'une suite.
– Représenter graphiquement un nuage de points.
– Raisonner par récurrence.

Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation : il ou elle obtient sur tableur ou sur calculatrice les premiers termes de la suite (u_n). *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève utilise de façon pertinente la calculatrice ou le tableur. *Il ou elle est capable d'expérimenter, de faire des essais, d'émettre une conjecture en cohérence avec ses observations, et tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable d'affiner ses explorations et de mener les calculs à leur terme en utilisant pertinemment les TICE. *Il ou elle fait preuve d'esprit critique avec un retour éventuel sur ses conjectures.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir faire mathématiques sur le sujet : analyser un nuage de points traduisant une suite convergente, monotone...	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et il ou elle est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.	

Remarques complémentaires :

Étude d'une courbe de Bézier

Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A de coordonnées (0 ; 6), B de coordonnées (2 ; 0) et C de coordonnées (4 ; 6).
Soit t un réel de l'intervalle [0 ; 1]. On définit les points :
– G barycentre du système de points pondérés $\{(A; 1-t), (B; t)\}$;
– H barycentre du système de points pondérés $\{(B; 1-t), (C; t)\}$;
– M barycentre du système de points pondérés $\{(G; 1-t), (H; t)\}$.
Le but de l'exercice est d'étudier le lieu des points M quand t décrit l'intervalle [0; 1], et la position de cet ensemble par rapport aux droites (AB) et (BC).

☞ *À propos du choix du logiciel de géométrie dynamique :*
Les constructions à réaliser sont assez fortement dépendantes du logiciel choisi.
La création de la variable t et l'affichage de sa valeur peut prendre la forme d'un « curseur » sur certains logiciels, ce type d'objet peut ou non faire partie de l'environnement standard.
La construction des barycentres est elle aussi plus ou moins simple.
Enfin l'ensemble des points M *peut aussi bien apparaître sous forme d'une « trace » que d'un lieu. Lorsque cet ensemble est un lieu, certains logiciels en donnent directement l'équation.*
Les examinateurs doivent donc prendre en compte cette forte variabilité, et adapter leurs indications et leur évaluation à l'environnement utilisé par le candidat.

Partie A

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
   Tracer les droites (AB) et (BC), puis faire apparaitre le lieu décrit par le point M lorsque t varie.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer le lieu du point M.

   ☞ *Les indications qu'il faudra éventuellement apporter au candidat pour la création de t puis de* G, H *et* M *seront adaptées au logiciel employé et à la démarche du candidat. Il en est de même pour le lieu de* M.

2. Quelle semble être la position des droites (AB) et (BC) par rapport au lieu obtenu ?
3. Sur quelle courbe semble se déplacer le point M ?

   Appeler l'examinateur pour annoncer les conjectures et décrire la démarche.

   ☞ *Avec certains logiciels, le candidat peut tracer une parabole $\mathcal{P}$ sur la figure de la question 1 et « déformer » cette parabole pour la superposer au lieu de* M *afin de vérifier le résultat précédemment conjecturé. Il obtient alors une indication sur l'équation du lieu. Le candidat peut observer que les droites* (AB) *et* (BC) *semblent tangentes à $\mathcal{P}$, respectivement en* A *et en* C.

Partie B

4. Déterminer en fonction de t les coordonnées des points G, H et M.
5. Valider ou invalider la conjecture émise à la question 3.
   Donner l'expression analytique du lieu du point M.

Production demandée

– Visualisation du lieu du point M.
– Énoncé des conjectures : courbe décrite par le point M et position des droites (AB) et (BC) par rapport à cette courbe.
– Réponses pour les questions 4. et 5.

Compétences évaluées

– Effectuer des constructions géométriques à l'aide d'un logiciel.
– Définir un barycentre de deux points du plan par ses coordonnées.
– Connaitre l'équation cartésienne d'une parabole.

Étude d'une courbe de Bézier

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

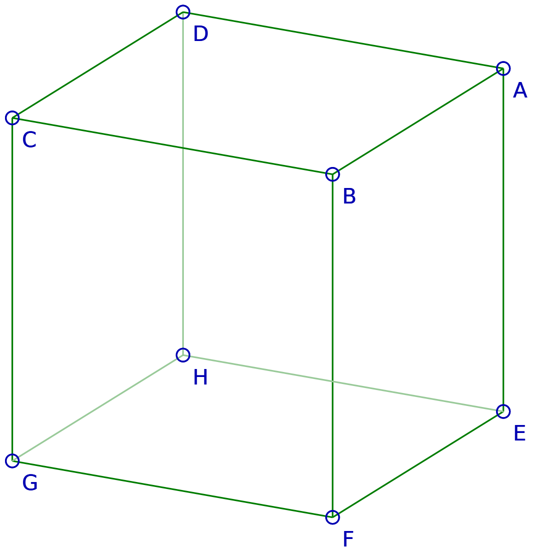
Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable de représenter la situation à l'aide TICE : les droites (AB) *et* (BC)*, le réel* t*, les points* G, H *et* M.	
Il ou elle sait rendre la figure dynamique et tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable de visualiser le lieu de M *et est capable d'expérimenter, de faire des essais.*	
L'élève est capable d'émettre une conjecture en ***cohérence*** *avec ses observations, tirant profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, le candidat est capable d'affiner ses explorations en utilisant pertinemment les TICE, affichant par exemple la parabole conjecturée.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir faire mathématiques sur le sujet : les coordonnées de G, H *et* M *sont correctement données en fonction de* t.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et est capable d'émettre un retour critique sur ses observations : il ou elle valide ou invalide sa conjecture et rectifie éventuellement.	

Remarques complémentaires :

Lieu géométrique de points dans l'espace

Énoncé



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$, on considère le cube ABCDEFGH reproduit ci-contre. On note I le centre de la face EFGH et J le milieu du segment [IF].
Pour tout réel m de l'intervalle $[0;1]$, on note M le barycentre des points pondérés suivants $(E;m)$, $(F;2m)$, $(G;m)$, $(C;4-4m)$.
Le but de l'exercice est de trouver le lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0;1]$.

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, construire le cube ABCDEFGH ainsi que les points I et J.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la figure construite.

   ☞ *La construction du cube est a priori simple, mais selon le degré de préparation du candidat cette tâche peut prendre plus ou moins de temps. L'examinateur veillera à ce qu'aucun candidat ne passe trop de temps sur cette question et n'hésitera pas à donner quelques indications qui peuvent conduire soit à utiliser les fonctions (ou figures) pré-enregistrées du logiciel soit à entrer les points par leurs coordonnées* $(\pm1, \pm1, \pm1)$.

   ☞ *Certaines procédures de construction (prisme régulier de Géospace par exemple) ne nomment pas tous les sommets ce qui va, par la suite, poser des problèmes pour l'obtention du barycentre. Il faut veiller à ce que ces difficultés ne bloquent pas le candidat.*

   (b) Construire le point M barycentre du système de points pondérés $(E;m)$, $(F;2m)$, $(G;m)$, $(C;4-4m)$ pour $m \in [0;1]$.

   (c) Émettre une conjecture quant au lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0;1]$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture faite.

   ☞ *La conjecture est simple, on valorisera le candidat qui met en œuvre une procédure de vérification (isoler un plan par exemple).*

2. (a) Démontrer que les points M, F, I et C sont coplanaires.

   (b) Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CJ}$.

   (c) Conclure alors quant au lieu du point M lorsque m décrit l'intervalle $[0;1]$.

Production demandée

- Construction de la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Énoncé de la conjecture.
- Relation et démonstrations demandées dans la question 2.

Compétences évaluées

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.
- Conjecturer un lieu de points.
- Démontrer la coplanarité de points.
- Utiliser la géométrie vectorielle.

Lieu géométrique de points dans l'espace

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable de construire la figure. Toutes les constructions correctes sont acceptées (huit sommets repérés par leurs coordonnées, utilisation de transformation, utilisation de prisme régulier ...).	
Le candidat sait construire le barycentre et obtenir une image du lieu de M.	
Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.	
Le candidat reconnait que le barycentre se déplace sur le segment [CJ].	
Le candidat a su déterminer la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ *et* $\overrightarrow{CJ}$ *et a su réaliser la démonstration.*	

Remarques complémentaires :

Suite définie par une sommation

Énoncé

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

1. À l'aide d'un outil adapté, calculer les 500 premiers termes de la suite (v_n).
   Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de cette suite ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture.

   ☞ *La conjecture attendue est : (v_n) est convergente.*
   Sur tableur, différentes stratégies sont possibles pour le calcul des termes. On n'attend pas nécessairement de l'élève l'utilisation d'une formule directe de sommation. Le calcul peut être décomposé en calculant au préalable les différentes valeurs de $\frac{1}{n^2}$. On donnera des indications en ce sens à un élève en difficulté sur cette question.

2. Rechercher, dans les deux cas suivants, à l'aide de l'outil choisi, un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :
   (a) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-3}$;
   (b) $v_{n+1} - v_n \leqslant 10^{-5}$.

   Comment interpréter ces résultats au regard de la conjecture émise à la question 1 ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des résultats et de l'interprétation.

   ☞ *Au préalable, un élève peut conjecturer que cette différence est positive et décroît.*
   Les réponses attendues sont 31 au (a) et 316 au (b). En cas d'erreur faire vérifier au candidat que les formules utilisées pour le calcul de $v_{n+1} - v_n$ sont bien cohérentes avec l'indice n correspondant.
   On attend de l'élève qu'il vérifie la cohérence des ces résultats avec la conjecture émise à la question 1 : la convergence de (v_n) entraîne que la différence $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $x_n = v_n + \frac{1}{n}$.
   À l'aide de l'outil choisi, calculer les 500 premiers termes de la suite (x_n) puis représenter graphiquement les suites (v_n) et (x_n).
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour une validation des calculs et de la conjecture et pour proposer une démarche pour la question 4.

☞ *La réponse attendue est : (v_n) et (x_n) sont adjacentes.*
On pourra donner des indications techniques permettant d'obtenir la représentation graphique à un élève en difficulté sur cette question.

4. (a) Démontrer la conjecture émise à la question 3.
   (b) Conclure sur la convergence de la suite (v_n).

☞ *On attend du candidat qu'il justifie le sens de variation de suites (x_n) et (v_n) ainsi que la convergence vers 0 de la différence $x_n - v_n$ et qu'il cite le théorème de convergence des suites adjacentes.*
On pourra demander à un candidat ayant terminé en avance de donner un encadrement de la limite (valeur exacte $\frac{\pi^2}{6}$) d'amplitude 10^{-2}.

Production demandée

– Obtention des 500 premières valeurs des suites (v_n) et (x_n), ainsi que la représentation graphique de ces valeurs.
– Obtention des valeurs de n_0 à la question 2.
– Réponses argumentées pour la question 4.

Compétences évaluées

– Émettre des conjectures.
– Démontrer des inégalités.
– Résoudre une inéquation.

Suite définie par une sommation

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation : il obtient sur tableur ou sur calculatrice les premiers termes de la suite (v_n)*.* *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève utilise de façon pertinente la calculatrice ou le tableur. *Il est capable d'expérimenter, de faire des essais. Il est capable d'émettre une conjecture en cohérence avec ses observations.* *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable d'affiner ses explorations et de mener les calculs à leur terme en utilisant pertinemment les TICE. *Il fait preuve d'esprit critique avec un retour éventuel sur ses conjectures.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir faire mathématiques sur le sujet : démontrer une inégalité, résoudre une inéquation...	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et il est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.	

Remarques complémentaires :

Distance minimale d'un point à une courbe

Énoncé

Dans un repère orthonormal d'origine O, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction logarithme népérien.
On s'intéresse à la distance OM lorsque M parcourt $\mathscr{C}$. Le but de l'exercice est de préciser si cette distance peut être rendue minimale et de caractériser le ou les point(s) M, s'il en existe, situé(s) sur $\mathscr{C}$ et rendant cette distance minimale.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire une figure permettant d'explorer cette situation.
2. Cette distance semble-t-elle minimale pour un (ou plusieurs) point(s) particulier(s) de $\mathscr{C}$? Si oui donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette plus petite distance et de l'abscisse de ce(s) point(s).

Appeler le professeur pour une vérification de la figure construite et des conjectures émises.

☞ *Ne pas hésiter à donner à l'élève toutes les aides logicielles dont il ou elle aurait besoin pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu de lui-même (elle-même).*
Par exemple, comment :
– *construire un point libre sur une courbe ;*
– *obtenir l'affichage d'une distance ;*
– *modifier la précision d'une affichage ;*
– *affiner un pas de pilotage.*

3. Tracer la droite (OM) ainsi que la tangente en M à la courbe $\mathscr{C}$. Que semble-t-il se passer lorsque M est positionné sur la courbe $\mathscr{C}$ de sorte que la distance OM soit minimale ?

Appeler le professeur pour une vérification de la conjecture.

☞ *On tiendra compte du fait que certains logiciels ne permettent pas facilement de tracer des tangentes et obligent à des manipulations plus longues d'équations de droites.*

Partie B

4. Quelle relation doit vérifier l'abcisse x_0 d'un point M_0 en lequel la distance OM est minimale ?

Appeler le professeur pour lui présenter la méthode envisagée et une vérification de la relation éventuellement obtenue.

☞ *On valorisera la modélisation de la situation par une fonction f ; dans cette optique, on appréciera certains arguments d'ordre graphique comme une représentation de la fonction dérivée de f qui aident à se convaincre de l'existence de* M_0*, et on fournira des aides dans ce sens si nécessaire.*
Au besoin, signaler à l'élève qu'il n'est pas utile de chercher à calculer x_0*.*

5. Prouver la conjecture élaborée dans la question 3.

Production demandée

– Les différentes étapes des stratégies prévues pour répondre aux questions 4. et 5.
– La mise en forme de l'une de ces étapes.

Compétences évaluées

– Tracer une courbe et la tangente en un point mobile de cette courbe.
– Coefficient directeur de la tangente en un point d'une courbe.
– Étude des variations d'une fonction.
– Condition d'orthogonalité de deux vecteurs.

Distance minimale d'un point à une courbe

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

- *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
- *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
- *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide technique éventuelle, d'effectuer toutes les constructions demandées, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.	
En exploitant les fonctionnalités du logiciel, avec une aide technique éventuelle, L'élève est capable de proposer des conjectures pour les questions 2 et 3.	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.	
L'élève est capable de concevoir une démarche pour établir une relation vérifiée par x_0.	
L'élève est capable d'obtenir une relation vérifiée par x_0.	
L'élève est capable de concevoir une démarche pour exprimer analytiquement l'orthogonalité de la droite (OM_0) *et de la tangente en* M_0 *à* $\mathscr{C}$.	
L'élève est capable de mettre en œuvre cette dernière démarche.	

Remarques complémentaires :

Intersection de tangentes

Énoncé

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g.
Pour tout réel a , on note :
– A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A,
– B le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et T_B la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point B,
– M $(x_M\ ;\ y_M)$ le point d'intersection des tangentes T_A et T_B.
On souhaite étudier le lieu géométrique $\mathscr{E}$ du point M lorsque a varie dans $\mathbf{R}$.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
   (a) Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que les tangentes T_A et T_B.

   ☞ *On prendra en considération le fait que certains logiciels ne permettent pas facilement de tracer des tangentes, et obligent à des manipulations plus longues d'équations de droite.*

   (b) Construire le point M.

   Appeler l'examinateur pour valider la figure, ou en cas de difficultés.

   (c) En observant la situation obtenue avec plusieurs valeurs de a, dire quelle relation semble exister entre les réels a et x_M .

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

   ☞ *Il peut être commode de faire «afficher» les nombres a et x_M (et, s'il le faut vraiment, leur différence).*

2. Tracer le lieu $\mathscr{L}$ du point M. Ce point semble appartenir à la courbe représentative $\mathscr{E}$ d'une fonction connue, quelle est cette fonction ? Comment peut-on vérifier cette conjecture ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie B

3. Démontrer que $\mathscr{L}$ fait effectivement partie de $\mathscr{E}$. Que dire de plus ?

   ☞ *Il s'agira essentiellement de procéder au changement de variable défini par $x = a + 1$ pour faire apparaitre la bonne réponse. La réciproque n'est pas explicitement demandée, mais un candidat s'interrogeant sur l'inclusion contraire, voire la justifiant, devrait certainement être valorisé.*

   ☞ *Un logiciel de calcul formel permet aussi de répondre à cette question, mais il s'agit là d'une utilisation quelque peu experte qui n'est pas attendue de la part de l'élève.*

Production demandée

- Courbes demandées aux questions 1 et 2.
- Réponse à la question 3.

Compétences évaluées

- Tracer la courbe représentative d'une fonction et sa tangente en un point donné.
- Utiliser l'aspect dynamique pour faire des conjectures.
- Mettre en place un protocole pour reconnaitre le lieu géométrique d'un point.
- Déterminer une équation d'une tangente à la courbe représentative d'une fonction.
- Résoudre un système linéaire.

Intersection de tangentes

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

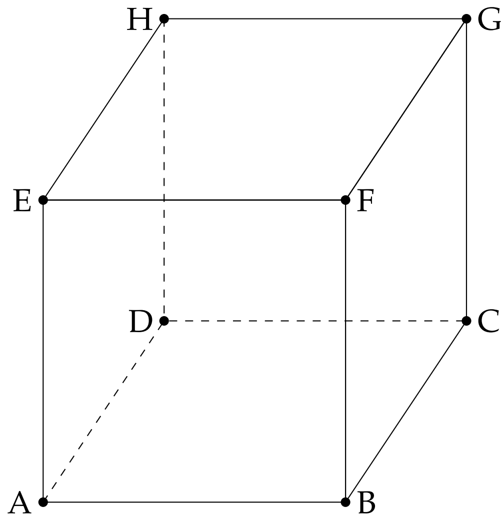
Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide technique éventuelle, de construire les courbes, les tangentes, le point M *et le lieu de* M.	
En exploitant les fonctionnalités du logiciel, avec une aide technique éventuelle, l'élève est capable d'émettre une conjecture quant à la relation entre a et x_{M} *et quant à la fonction représentée par* $\mathscr{E}$.	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il a prévu.	
L'élève est capable de concevoir une démarche pour vérifier que $\mathscr{L}$ *est inclus dans* $\mathscr{E}$.	
L'élève est capable de démontrer que $\mathscr{L}$ *est inclus dans* $\mathscr{E}$.	
L'élève conçoit le problème de la réciproque et, éventuellement, le résout.	

Remarques complémentaires :

Volume d'un tétraèdre

Énoncé



On considère un cube de l'espace, formé par ses sommets ABCDEFGH (voir figure ci-contre). Sur la demi-droite [AE) on considère un point variable K.
Le but de l'exercice est de rechercher une position du point K, pour laquelle le volume du tétraèdre BDGK est égal à la moitié du volume du cube.

1. À l'aide d'un logiciel représenter un cube ABCDEFGH.
   Placer un point K variable sur la demi-droite [AE).

   Appeler l'examinateur en cas de difficulté

   ☞ *La construction du cube est a priori simple, mais selon le degré de préparation du candidat cette tâche peut prendre plus ou moins de temps. L'examinateur veillera à ce qu'aucun candidat ne passe trop de temps sur cette question et n'hésitera pas à donner quelques indications qui peuvent conduire soit à utiliser les fonctions (ou figures) pré-enregistrées du logiciel soit à entrer les points par leurs coordonnées* $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

2. Pour quelle position du point K le volume du tétraèdre BDGK semble-t-il être égal à la moitié de celui du cube ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la position du point K trouvée.

   ☞ *On vérifiera la construction et en particulier que le point* K *est variable sur la demi-droite* [AE)*. La position de* K *peut être exprimée de diverses manières (milieu, vecteur double, etc.).*

3. En supposant que K occupe la position trouvée à la question 2., conjecturer la nature des triangles KGB et KDG à l'aide du logiciel.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures faites.

   ☞ *On attend de l'élève qu'il donne les éléments pouvant aider aux conjectures : calculs de mesures d'angles faits par le logiciel, mise en évidence en changeant d'angle de vue (en «tournant» la figure ou en changeant le plan vu de face), etc.*
   Plus précisément :
   - *afficher les valeurs des volumes du cube et du tétraèdre ;*
   - *afficher les valeurs de* AB *et de* AK*, ou construire le milieu de* [AK]*, ou encore toute autre «manipulation» permettant d'argumenter la conjecture sur la position de* K.

4. Démontrer que lorsque le point K occupe la position trouvée à la question 2., le volume du tétraèdre BDGK est bien la moitié du volume du cube.

Production demandée

– Affichage des valeurs numériques nécessaires pour émettre la conjecture de la question 2.
– Éléments de preuve pour la question 4.

Compétences évaluées

– Réaliser des constructions avec un logiciel de géométrie dans l'espace.
– Émettre et tester des conjectures.
– Calculer des longueurs, des aires et des volumes.
– Utiliser la notion d'orthogonalité dans l'espace.

Volume d'un tétraèdre

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide technique éventuelle, de construire le cube et un point K *sur la demi-droite* [AE).	
En exploitant les fonctionnalités du logiciel, avec une aide technique éventuelle, l'élève est capable d'émettre une conjecture quant à la position du point K *cherchée.*	
En exploitant les fonctionnalités du logiciel, l'élève est capable d'émettre une conjecture quant à la nature des triangles KGB *et* KDG, *tirant profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet, notamment à propos de l'orthogonalité dans l'espace.	
L'élève est capable de concevoir une démarche permettant d'exprimer le volume du tétraèdre BDGK.	
L'élève est capable d'utiliser le logiciel pour vérifier une conjecture.	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Recherche d'un point fixe

Énoncé

Dans le plan complexe orienté, on considère un triangle OO′A de sens direct, rectangle en O. On considère M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A. On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme O en O′ et on désigne par M′ le point image de M par la similitude S. On cherche à prouver que la droite (MM′) passe par un point fixe.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire la figure associée à la situation décrite ci-dessus.
2. Construire l'image $\mathscr{C}'$ du cercle $\mathscr{C}$ par la similitude S. Caractériser cet ensemble $\mathscr{C}'$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre pour la droite (MM′) lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

☞ *La vérification attendue comporte ces éléments :*
- *Demander à l'élève si la similitude S est caractérisée, quel en est le rapport de S et quel en est son angle.*
- *Vérifier la figure (le triangle est-il rectangle quand on fait bouger* O′ *?).*
- *Vérifier que* M *est libre sur* $\mathscr{C}$ *; demander la caractérisation de* $\mathscr{C}'$*.*
- *Vérifier la conjecture émise par l'élève.*

On appelle A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

4. On pose $S(\text{B}) = \text{B}'$. Quelle propriété relative est vérifiée par les triangles ABB′ et AOO′ ? Justifier.
5. Positionner le point M afin que le point B soit entre les points M et M′.
6. Donner des arguments mathématiques permettant de prouver que les points M, B et M′ sont alignés.

Appeler l'examinateur pour vérification.

☞ *On pourra s'appuyer sur le canevas suivant :*
- *Construction de* B.
- *Les triangles* ABB′ *et* AOO′ *sont semblables, correctement justifié oralement.*
- *Arguments permettant de prouver que les points* M, B *et* M′ *sont alignés.*

On acceptera l'utilisation des angles géométriques, la notion d'angle inscrit ou d'angle au centre, et on fera attention à ce que l'élève n'utilise pas l'alignement des points M, B *et* M′*.*

Production demandée

– La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
– La caractérisation de l'ensemble $\mathscr{C}'$.
– La justification de la propriété de la question 4.
– La justification de la conjecture de la question 3. seulement dans le cas où le point B est entre les points M et M′.

Compétences évaluées

– Réaliser des constructions avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Visualiser le lieu d'un point.
– Caractériser une similitude plane.
– Utiliser des triangles semblables et des angles inscrits.

Recherche d'un point fixe

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable de construire la figure initiale à l'aide d'un logiciel de géométrie plane.	
Le candidat est capable, avec une aide éventuelle, de construire l'image du cercle par la similitude à l'aide du logiciel.	
Le candidat est capable d'émettre des conjectures à partir des résultats observés.	
Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances sur le sujet : similitude, alignement de points . . .	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Suites, approximation d'un réel

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 9$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$b_n = \frac{25}{a_n^2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$

On se propose d'étudier la monotonie et la limite de chacune de ces deux suites.

Partie A

1. Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, de a_n et de b_n, pour n entier variant de 0 à 20.
2. En observant les résultats obtenus sur le tableur, conjecturer, pour chacune des suites (a_n) et (b_n), la monotonie et une valeur approchée de la limite à 10^{-6} près.

Appeler l'examinateur pour lui présenter les tableaux et les conjectures.

☞ *Pour les questions 1. et 2., on attend que l'élève ait calculé à l'aide du tableur les valeurs de a_n et de b_n, pour n variant de 0 à 20.*
Le candidat a émis les conjectures sur la monotonie de chacune des suites et sur leur limite.
On pourra valoriser le candidat s'il remarque que les deux suites semblent adjacentes.

3. On considère la suite (c_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 0$, par $c_n = a_n^3$.
Créer une nouvelle colonne du tableur pour calculer les termes c_n, pour n variant de 0 à 20.
Émettre alors une conjecture sur la valeur exacte de la limite de la suite (a_n).
4. Conjecturer de même la valeur exacte de la limite de la suite (b_n).

Appeler l'examinateur

☞ *Pour les questions 3. et 4., le candidat doit pouvoir conjecturer que les suites de terme général a_n^3 et b_n^3 convergent toutes les deux vers le même réel, puis en déduire que la valeur exacte de la limite commune des suites (a_n) et (b_n).*

Partie B

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $b_n^3 \leqslant 25 \leqslant a_n^3$.

☞ *Ces inégalités sont admises afin d'alléger la partie mathématique du sujet et de la rendre réalisable dans le temps imparti à l'épreuve.*

Après avoir vérifié que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{3}$, démontrer les résultats conjecturés à la question 2. sur la monotonie des suites (a_n) et (b_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le schéma de la démonstration.

☞ *On pourra proposer au candidat d'utiliser les variations de la fonction* $f : x \mapsto \dfrac{25}{x^2}$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.
Le candidat peut aussi conclure à l'aide d'inégalités.

6. Citer les théorèmes qui permettent de conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

   Appeler l'examinateur pour lui donner la réponse attendue.

   ☞ *On attend le théorème.*

7. On désigne par ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (a_n) et (b_n).
   En utilisant les relations qui définissent ces deux suites, démontrer les résultats conjecturés aux questions 3. et 4. sur les valeurs exactes des réels ℓ et ℓ'.

   Appeler l'examinateur

   ☞ *On attend que soit justifiées les égalités, puis finalement* $\ell = \ell' = 25^{1/3}$.

Production demandée

- Obtention à l'écran des termes a_n, b_n et c_n, pour n entier variant de 0 à 20.
- Conjecture sur les valeurs exactes des limites des suites (a_n) et (b_n).
- Démarches et réponses argumentées aux questions 5. et 7.

Compétences évaluées

- Utiliser un tableur pour étudier des suites définies par récurrence.
- Émettre et tester des conjectures.
- Étudier les variations d'une suite.
- Déterminer la limite d'une suite.

Suites, approximation d'un réel

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable, avec une aide éventuelle, de construire une feuille de calcul permettant de calculer les premiers termes des suites (a_n) et (b_n).	
Le candidat est capable de compléter la feuille de calcul pour calculer les premiers termes de la suite (c_n) .	
Le candidat est capable d'initiative pour considérer la suite (b_n^3).	
Le candidat est capable d'émettre des conjectures à partir des résultats observés.	
Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances sur le sujet : variation de suite, limite de suite . . .	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Aire variable d'un triangle

Énoncé

Soit un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x - 1$.
Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1, et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, a étant un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
On s'intéresse à l'aire du triangle OAB et à la variation de cette aire en fonction de a.

Partie A

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pou rlui présenter la figure construite.

   ☞ *Dans le cas où la fonctionalité "point sur une courbe" n'existerait pas avec le logiciel utilisé, on amènera le candidat à réfléchir à la question de l'appartenance d'un point à une courbe.*

2. Afficher à l'écran l'aire du triangle OAB.
   En faisant varier a, chercher une valeur approchée de la valeur de a pour laquelle l'aire du triangle OAB est maximale. Donner une valeur approchée de cette aire maximale.

   Appeler l'examinateur pour lui exposer la conclusion.

3. Pour tout a dans l'intervalle $[0; 1]$, on note $f(a)$ l'aire du triangle OAB. Construire l'ensemble des points $M(a\,; f(a))$. Retrouver les résultats de la question précédente.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la courbe obtenue et lui proposer la démarche envisagée pour la question suivante.

   ☞ *Pour dessiner l'ensemble des points M, il peut être nécessaire d'aider le candidat dans la mesure où cette courbe n'a pas de raison de se superposer au dessin. (Ce n'est en effet pas le lieu d'un point de la figure.)*

Partie B

4. (a) Déterminer l'expression de $f(a)$ en fonction de a.

   ☞ *On pourra, dans un premier temps, suggérer au candidat que le calcul peut se faire par différences d'aires. Les aides ultérieures concernent elles la formule de calcul d'aire d'un trapèze et le recours aux intégrales pour calculer l'aire d'un domaine du plan limité par une courbe.*

   (b) En étudiant la fonction f, déterminer la valeur exacte de la variable a pour laquelle la fonction f atteint son maximum et la valeur exacte de ce maximum.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure demandée et de l'ensemble des points M de la question 3.
– Affichage des valeurs approchées de a et de $f(a)$ pour lesquelles l'aire du triangle est maximale.
– Démarches et réponses argumentées à la question 4.

Compétences évaluées

– Élaborer une stratégie de construction avec un logiciel de géométrie dynamique.
– Utiliser l'aspect dynamique du logiciel pour établir des conjectures.
– Calculer l'aire d'un triangle dont on connait les coordonnées des sommets.
– Étudier les variations et déterminer le maximum d'une fonction simple.

Aire variable d'un triangle

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de construire la courbe demandée ainsi que le point mobile sur la courbe. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral, notamment dans le cas où le logiciel ne permet pas la construction immédiate de ce point.	
L'élève est capable d'utiliser le logiciel pour déterminer le maximum de l'aire du triangle. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour affiner le pas de modification du réel a afin de préciser les valeurs optimales observées.	
L'élève sait modifier la figure construite pour afficher la courbe demandée. Il ou elle est capable d'émettre un retour critique et cohérent sur ses diverses observations.	
L'élève montre un certain nombre de savoir-faire sur le calcul d'aire via les intégrales et l'étude des variations d'une fonction.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice .	

Remarques complémentaires :

Optimisation en géométrie plane

Énoncé

Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $x \mapsto e^x$ et la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

On se propose de déterminer, s'il existe, un point M de $\mathscr{C}$ tel que la distance de M à la droite D soit minimale.

Partie A

1. Utiliser un logiciel de géométrie pour construire la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.
2. Placer un point mobile M sur $\mathscr{C}$ et construire le point N image de M par la projection orthogonale sur D.

☞ *L'examinateur pourra, par des questions simples, aider le candidat sur la construction du projeté orthogonal sans le pénaliser.*

3. Conjecturer, au moyen du logiciel, l'abscisse du point M_0 de $\mathscr{C}$ dont la distance à D est minimale.
   Proposer une valeur approchée de cette distance minimale.
   Conjecturer une propriété de la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.

☞ *L'examinateur acceptera une valeur approchée de l'abscisse de* M_0*, la valeur exacte* $\ln(2)$ *étant demandée en démonstration.*

Appeler l'examinateur pour lui présenter les constructions, la valeur approchée et les conjectures.

Partie B

4. Élaborer une méthode permettant de démontrer ces conjectures.

☞ *L'examinateur aidera le candidat qui a du mal à prendre des initiatives sur la partie démonstration.*

Appeler l'examinateur pour lui présenter la méthode.

5. Calculer les coordonnées de M_0 et sa distance à D.

☞ *L'examinateur donnera la formule donnant la distance d'un point à une droite, si le candidat ne s'en souvient plus.*

☞ *On pourra éventuellement pour valoriser le candidat, lui demander de démontrer la conjecture émise sur la tangente.*

Production demandée

- Construction de $\mathscr{C}$, D, M et N au moyen du logiciel de géométrie.
- Conjectures relatives à l'abscisse de M_0 et à la tangente en M_0 à $\mathscr{C}$.
- Proposition d'une valeur approchée de la distance de M_0 à D.
- Calcul des coordonnées de M_0 et de sa distance à D.

Compétences évaluées

- Tracer au moyen d'un logiciel de géométrie des courbes définies par leur équation.
- Construire l'image d'un point par une projection orthogonale.
- Connaitre la définition de la projection orthogonale sur une droite dans le plan.
- Caractériser la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction dérivable.
- Exprimer, en repère orthonormal, la distance d'un point à une droite dans le plan.
- Déterminer un extremum d'une fonction dérivable.

Optimisation en géométrie plane

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un logiciel de géométrie, avec une aide éventuelle, pour le tracé des courbes $\mathscr{C}$ *et* D*, la construction du point* N*. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour trouver l'abscisse du point* M_0.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : distance d'un point à une droite, recherche d'un extremum par l'étude d'une fonction, résolution d'équations.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Énoncé

On dispose de deux urnes U et V contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U contient dix boules numérotées de 1 à 10. L'urne V contient dix boules numérotées de 0 à 9. Un jeu se déroule de la manière suivante : le joueur verse une mise initiale de 100 jetons, puis il tire au hasard une boule dans l'urne U et une boule dans l'urne V de façon indépendante. Chaque boule portant un numéro inférieur ou égal à 4 rapporte a jetons où a est un naturel non nul, le tirage d'une autre boule ne rapporte ni ne fait perdre aucun jeton. On regarde à l'issue de ce jeu le gain algébrique (gain ou perte) compté en jetons.

Partie A

1. On simule 1000 exécutions du jeu sur un tableur. On fixe dans un premier temps $a = 150$.

   (a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D
1	Rang du tirage	Numéro de la boule tirée dans l'urne U	Numéro de la boule tirée dans l'urne V	Gain algébrique
2	1			
3	2			
⋮	⋮			
1001	1000			

   ☞ *L'examinateur aidera le candidat rencontrant des difficultés à établir le test pour le calcul du gain algébrique.*

   Appeler l'examinateur pour vérifier la feuille de calcul.

   (b) Déterminer la moyenne des gains obtenus lors de cette simulation.

   (c) À l'aide d'autres simulations, conjecturer la valeur vers laquelle semble tendre la moyenne des gains obtenus.

   ☞ *L'examinateur veillera à ce que le candidat puisse utiliser la touche de fonction permettant de répéter une même opération.*

   Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

2. On souhaite faire varier la valeur de a.

   (a) Adapter la feuille de calcul pour obtenir des simulations en fonction de a.

   ☞ *L'examinateur aidera le candidat rencontrant des difficultés à modifier la feuille de calculs.*

   (b) Est-il possible de donner une valeur à a qui paraisse rendre le jeu équitable ?

   Appeler l'examinateur pour vérifier la démarche et la conjecture.

Partie B

3. Soit X la variable aléatoire donnant le gain algébrique à l'issue d'un tirage.
   (a) Déterminer l'espérance de X en fonction de a.

   ☞ *L'examinateur suggérera au candidat la recherche des probabilités des trois événements en fonction de* a *si celui-ci ne sait pas débuter le calcul de l'espérance mathématique.*

   (b) Est-il possible de trouver a afin que le jeu soit équitable ?

   ☞ *Rappeler si nécessaire la définition de « jeu équitable ».*

   (c) Comparer le résultat avec les conjectures obtenues dans la Partie A.

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la feuille de calcul.
- Réponses argumentées pour les questions posées en 3.(a), 3.(b) et 3.(c).

Compétences évaluées

- Utiliser les fonctions de test d'un tableur ou d'une calculatrice.
- Faire varier la valeur d'une cellule de la feuille de calcul pour tester une hypothèse.
- Simuler une expérience aléatoire à l'aide d'un tableur.
- Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

Simulation d'un tirage de boules dans des urnes

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un tableur, avec une aide éventuelle, pour la simulation d'entiers compris entre 1 et 10 (entre 0 et 9), pour le calcul du gain algébrique faisant intervenir la fonction `SI()`. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour obtenir d'autres simulations en fonction de a.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : calcul de probabilités, calcul d'une espérance mathématique.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés : recherche de la valeur de a donnant une espérance nulle et comparaison avec les conjectures obtenues.	

Remarques complémentaires :

Propriétés de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit a un réel quelconque, M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et $-a$.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de votre choix.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

2. Faire varier a et émettre des conjectures concernant respectivement :
   - la droite (MN) ;
   - le lieu du point I intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N.

   ☞ *L'examinateur amènera le candidat à utiliser un curseur donnant des valeurs décimales si celui-ci ne prend que des valeurs entières pour a.*

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

3. On se propose d'étudier les conjectures émises à la question précédente.
   (a) Déterminer en fonction de a les coordonnées des points M et N.
   (b) Justifier les conjectures émises à la question 2.

   ☞ *L'examinateur donnera sans pénaliser quelques indications sur la recherche du lieu géométrique si le candidat a du mal à débuter la démonstration.*

   ☞ *On pourra éventuellement pour valoriser le candidat, lui demander de démontrer que tout point du lieu est bien le point d'intersection des deux tangentes à la courbe en* M *et* N.

Production demandée

- Visualisation à l'écran du lieu du point I.
- Réponses argumentées aux questions 3.(a) et (b) .

Compétences évaluées

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Observer la position d'une droite variable.
- Déterminer une équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction dérivable.

Propriétés de la courbe représentative d'une fonction

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un logiciel adapté à la situation , avec une aide éventuelle, pour obtenir plusieurs valeurs de a (à l'aide d'un curseur par exemple). Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour donner le lieu du point* I *et la direction de la droite* (MN).	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : détermination d'une équation de droite, d'une tangente à partir du nombre dérivé, de l'intersection de deux droites, d'un lieu géométrique.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul N est *en division harmonique* si le quotient du nombre de diviseurs de N par la somme des inverses des diviseurs de N est un entier (c'est-à-dire, que le nombre des diviseurs est un multiple de la somme des inverses des diviseurs).

Par exemple :

- 6 admet **4** diviseurs qui sont 1 ; 2 ; 3 et 6 ;
- la somme des inverses des diviseurs de 6 vaut : $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{2}$;
- le quotient $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}=2$ est un entier ;
- 6 est donc en division harmonique.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, dire si les nombres 32 et 140 sont en division harmonique.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   ☞ *L'emploi d'un logiciel de calcul formel, avec des fonctions arithmétiques, permet de répondre facilement à cette question. On s'assurera alors que le candidat connait toutes les fonctions utiles pour la suite.*

   ☞ *L'emploi d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique demande plus de travail. On attirera l'attention du candidat sur les erreurs d'arrondis du tableur.*

2. Pour tout entier n non nul on pose $q_n = 2^{n+1} - 1$ et $\alpha_n = 2^n q_n$.

   (a) Déterminer à l'aide du logiciel les quatre (ou cinq si possible) premières valeurs de n pour lesquelles q_n est un nombre premier.

   ☞ *L'utilisation d'un logiciel de calcul formel facilite nettement le travail dans cette question, mais aussi dans la suite. Cependant les méthodes peuvent être différentes suivant le logiciel choisi. On veillera à ce que le candidat dispose de toutes les informations utiles concernant les manipulations de listes de nombres (somme, nombre d'éléments...) en fonction du logiciel choisi.*

   ☞ *Le choix du tableur pour trouver la cinquième valeur de n peut s'envisager en utilisant des propriétés du cours sur les tests de primalité d'un entier :*
   – critères de divisibilité ;
   – n est premier si l'entier 1 est le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$;
   – ...
   On pourra limiter le candidat à la recherche des quatre premières valeurs de n et lui demander simplement d'exposer une méthode utilisant ces propriétés pour de plus grandes valeurs.

(b) Pour chacune des valeurs trouvées, calculer le nombre de diviseurs de α_n et la somme des inverses des diviseurs de α_n. Que peut-on conjecturer ?

Appeler l'examinateur pour vérification des valeurs et présentation de la conjecture.

☞ *Suivant le choix du logiciel de calcul formel, le calcul de la somme des inverses des diviseurs est plus ou moins simple. Il sera probablement utile de donner des indications utiles pour ces opérations.*

☞ *L'utilisation d'un tableur ne pose pas de problème si on se limite aux quatre premières valeurs de n. Cependant, on s'assurera que le candidat a conscience de la nature des résultats numériques obtenus.*

Partie B

3. Soit p un nombre premier.
   Montrer que p n'est pas en division harmonique.
4. On suppose que $q_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.
   (a) Donner la liste des diviseurs de α_n en fonction de q_n.
   (b) Que peut-on conclure si la somme des inverses des diviseurs de α_n vaut 2 ?
   (c) Montrer que la situation précédente est vérifiée.

Production demandée

– Questions 3 et 4.

Compétences évaluées

– Utiliser un logiciel adapté à des opérations arithmétiques simples portant sur des entiers ;
– Savoir trouver l'ensemble des diviseurs d'un entier décomposé en facteurs premiers ;
– Connaître les résultats élémentaires concernant les suites géométriques.

Une propriété des diviseurs de certains entiers

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable de tester la primalité d'un nombre à l'aide d'outils logiciels.	
Le candidat est capable de tenir compte des problèmes d'approximation dans les calculs réalisés par un logiciel.	
Le candidat est capable, avec une aide éventuelle, d'utiliser des fonctions avancées dans un logiciel : tests, manipulation de données, ...	
Le candidat est capable d'émettre des conjectures à partir des résultats observés.	
Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances mathématique sur le sujet : nombres premiers, tests de primalité, somme des termes d'une suite géométrique...	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Étude d'un ensemble de points

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ qui permet une assimilation à l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on définit le nombre complexe $f(z) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

On pose $a_0 = 4 + 2\mathrm{i}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, et on note A_n le point d'affixe a_n dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer a_n pour n variant de 1 à 30.

   ☞ *Différents types de logiciels sont utilisables : logiciel de calcul numérique ou formel, tableur grapheur, opérant avec des complexes.*

   ☞ *L'examinateur doit s'assurer que l'élève connaît les procédures logicielles pour mettre en oeuvre une relation de récurrence et pour représenter le nuage de points obtenu. En cas de difficultés ne pas hésiter à donner l'aide nécessaire.*

   (b) Représenter le nuage des points A_n pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les calculs et le graphique réalisés.

   ☞ *On attend que l'élève observe l'enroulement du nuage autour du point J d'affixe i, et qu'il émette une première conjecture concernant la suite des distances JA_n. Pour conjecturer le «point limite», l'examinateur pourra suggérer d'observer les affixes des points A_n.*

2. Soit J le point d'affixe i. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $d_n = \mathrm{JA}_n$.

   (a) Calculer d_n pour n variant de 1 à 30.

   (b) Représenter le nuage des points de coordonnées (n, d_n) pour n variant de 1 à 30. Que constate-t-on ?

   (c) Conjecturer la nature de la suite (d_n).

Appeler l'examinateur pour lui présenter le travail réalisé. Lui proposer des conjectures relatives à la suite (d_n).

   ☞ *L'examinateur contrôlera que l'élève sait exprimer la distance de deux points en fonction de leurs affixes et qu'il connait les procédures logicielles pour effectuer les calculs et la repésentation graphique. Il pourra éventuellement suggérer d'ouvrir une deuxième fenêtre graphique.*

☞ *Les résultats numériques ou graphiques obtenus sont à rapprocher des observations faites à partir du premier graphique.*

☞ *L'élève doit mettre en oeuvre une procédure de calcul pour conjecturer que la suite (d_n) est géométrique. Dans l'énoncé de cette conjecture, selon l'outil utilisé, on n'exige pas la valeur exacte de la raison.*

Partie B

3. (a) Soit S la transformation du plan, d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
   Préciser la nature de S et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.
   (b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Étudier sa convergence.
   (c) Interpréter les observations faites sur les points A_n représentés dans la question 1.(b).

☞ *Il s'agit essentiellement de déterminer le centre et le rapport de la similitude en vue d'établir la nature et la convergence de la suite (d_n). Toute démarche cohérente est acceptée, y compris la mise en oeuvre de fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel.*

☞ *On attend que l'élève confronte le résultat obtenu avec les différentes conjectures émises.*

Production demandée

– Affichage à l'écran des calculs et du graphique.
– Réponses argumentées pour la question 3.

Compétences évaluées

– Utiliser un logiciel pour effectuer des calculs dans **C**.
– Représenter graphiquement un nuage de points.
– Utiliser des similitudes du plan.
– Obtenir une liste de plusieurs termes d'une suite, et reconnaitre le type de cette suite.

Étude d'un ensemble de points

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation à l'aide du logiciel : calcul des termes successifs de la suite (a_n) et représentation graphique du nuage de points. *Il ou elle est capable d'émettre des conjectures en cohérence avec les résultats obtenus.*	
L'élève est capable d'élaborer et de mettre en oeuvre une démarche logicielle pour définir les termes de la suite (d_n) et pour conjecturer la nature de cette suite.	
L'élève tire profit des indications données à l'oral : ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu.	
L'élève fait preuve de connaissances, de savoir-faire sur le sujet : suites récurrentes, suites géométriques, affixes des points, similitudes.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice et est capable de faire un retour critique sur ses observations.	

Remarques complémentaires :

Équation avec un paramètre

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation (E) : $\dfrac{x}{(2\ln x+1)^2} = mx$, où m est un paramètre réel.

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(2\ln x+1)^2}$ et la droite (d) d'équation $y = mx$.

   Conjecturer alors le nombre de solutions de l'équation (E).

   Appeler l'examinateur pour lui montrer le graphique et répondre à la question posée.

   ☞ *Cette question requiert simplement la construction de la courbe et de la droite mobile. La discussion pourra se faire notamment sans que les points d'intersections n'aient été construits avec le logiciel.*

   (b) Dans cette question, m est un entier naturel non nul. On note a_m la plus petite des solutions de l'équation (E) et b_m, la plus grande. On s'intéresse aux suites (a_m) et (b_m).

   Conjecturer, à l'aide du logiciel, les variations et la convergence de ces deux suites.

   Que peut-on dire de ces deux suites ?

   Appeler l'examinateur pour lui exposer les conjectures faites et la démarche envisagée pour les questions à venir.

   ☞ *La construction des points d'intersection de la courbe et de la droite n'est pas toujours simple et dépend beaucoup du logiciel employé. L'énoncé ne demandant pas la construction effective des suites (a_m) et (b_m), l'examinateur pourra en particulier accepter des intersections observées (et non matérialisées par des points). Le caractère adjacent est alors observable sans être toutefois flagrant.*

Partie B

2. (a) Calculer les expressions de a_m et b_m, en fonction de m.

   (b) Justifier le sens de variation de la suite (b_m).

   (c) Calculer la limite de cette suite.

Production demandée

– Visualisation à l'écran des représentations graphiques.
– Conjectures demandées.
– Réponse écrite et orale à la question 2.

Compétences évaluées

– Représenter graphiquement une fonction dépendant d'un paramètre ;
– Utiliser le logiciel, pour émettre des conjectures ;
– Exprimer les solutions d'une équation en fonction d'un paramètre ;
– Mettre en œuvre les notions du programme sur les suites.

Équation avec un paramètre

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de construire la courbe demandée ainsi que la droite dont la pente doit être modifiable. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.	
L'élève est capable de formuler une conjecture claire quant au nombre de solutions observables en utilisant en particulier des valeurs non entières de m. L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour affiner sa conjecture, en utilisant un pas plus petit pour les modifications du réel m afin d'observer finement les cas limites.	
L'élève sait modifier la figure construire pour observer le comportement des suites nommées. Il ou elle est capable d'émettre un retour critique sur ses observations.	
L'élève montre un certain nombre de savoir-faire sur les équations en logarithme et de connaissances sur les suites adjacentes.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice.	

Remarques complémentaires :

Limites d'intégrales

Énoncé

Pour un entier naturel n non nul, on considère le nombre I_n défini par l'intégrale :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x.$$

On cherche à déterminer la limite éventuelle de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

☞ *Les logiciels de calcul formel permettent d'obtenir immédiatement la valeur exacte de I_n et la limite de la suite (I_n). Le travail relatif à l'étude des fonctions f_n garde cependant tout son sens. Au cas où un candidat emploie ces outils, l'examinateur s'efforcera de vérifier que le candidat fait bien le lien entre l'allure de la famille de courbes et la limite obtenue à l'aide du logiciel.*

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la courbe représentative de la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

2. Faire varier n. Quand n devient très grand, quelle est l'allure de la courbe représentative de f_n ?
3. Essayer alors de conjecturer une valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$.

Appeler l'examinateur pour présenter la conjecture.

☞ *De très nombreux logiciels peuvent être utilisés pour ce travail graphique. Suivant les outils utilisés on pourra obtenir une courbe dynamique ou une famille de courbes. L'examinateur s'attachera à vérifier que le candidat songe à associer la suite (I_n) à des aires et qu'il utilise au mieux les possibilités du logiciel pour avoir une idée de la limite. Le fait que le candidat songe à faire tracer la courbe représentative de l'exponentielle sera valorisé.*

Partie B

4. Calculer une primitive de f_n sur $[0;1]$ et en déduire la valeur exacte de I_n.

Appeler l'examinateur pour une vérification.

☞ *Pour cette question, l'examinateur vérifiera qu'un candidat utilisant un système de calcul formel sait faire le lien entre intégrale et primitive et sait exploiter correctement le logiciel qu'il emploie.*

5. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

    ☞ *On attend ici une justification du résultat donné, donc l'usage d'un système de calcul formel est sans incidence.*

6. En déduire la valeur exacte de $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$.

Production demandée

– Les représentations graphiques de la question 1.
– La rédaction des questions 5. et 6.

Compétences évaluées

– Représenter graphiquement une famille de fonctions.
– Donner une estimation d'une aire à l'aide du logiciel utilisé.
– Calculer l'intégrale d'une fonction.
– Calculer une limite de suite.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Énoncé

Pour tout entier naturel n non nul, on considère le nombre U_n défini par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

On cherche à déterminer si ce nombre peut être divisible par l'un ou plusieurs des nombres premiers suivants : 2 ; 3 ; 7 et 13.

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, calculer $U_1, U_2, \cdots, U_{30}$.

   ☞ *En cas de besoin on questionnera le candidat qui utilise mal la syntaxe du logiciel, sur les fonctionnalités dont il ou elle a besoin et on lui indiquera l'aide du logiciel.*

   ☞ *Pour la question suivante l'élève pourrait utiliser une commande du type* `MOD( ; )` *pour déterminer le reste d'une division euclidienne.*

2. Déterminer les listes des restes de la division de U_n par 2 ; par 3 ; par 7 et par 13.

   (a) Quelles conjectures peut-on en tirer ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   (b) À quelle(s) condition(s) sur n, le nombre U_n semble-t-il être divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

   ☞ *L'examinateur aiguillera l'élève qui ne songe pas à donner des critères de divisibilité de U_n par 2, 7 et 13, selon les valeurs de n, vers la problématique du sujet.*

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

Partie B

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, 7 divise $3^n - 1$.

   Appeler l'examinateur pour vérification

   ☞ *L'examinateur pourra amener le candidat à reconnaitre U_n comme la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.*

☞ *L'examinateur pourra demander au candidat d'énoncer le théorème de Gauss avant qu'il débute la démonstration de la réciproque.*

4. À l'aide de la question précédente, démontrer la conjecture émise pour 7.
5. Dans le cas où U_n est divisible par 7, U_n est-il divisible par 7×13 ? par $2 \times 7 \times 13$?

☞ *Dans cette question seule une démarche pour la démonstration est demandée.*

Production demandée

– Les différentes conjectures.
– La démonstration de la question 4 .

Compétences évaluées

– Savoir utiliser un tableur.
– Émettre des conjectures.
– Savoir utiliser le théorème de Gauss.

Divisibilité par 2, 3, 7 et 13 de certains entiers naturels

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable d'utiliser un tableur ou un logiciel de calcul numérique, avec une aide éventuelle, pour le calcul des termes U_n *et les restes des divisions euclidiennes. Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral, par exemple pour donner la forme de l'entier n pour que 7 divise* U_n*.*	
L'élève montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : divisibilité (congruence), somme des termes consécutifs d'une géométrique, utilisation du théorème de Gauss.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Énoncé

On construit deux suites (x_n) et (y_n) de la manière suivante :

Initialisation : $x_0 = 10$, $y_0 = 0$

Récurrence : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point M_n de coordonnées (x_n, y_n). L'objectif est d'observer et d'étudier le nuage des points M_n obtenus, à l'aide d'un logiciel adapté.

☞ *La plupart des logiciels de géométrie dynamique ne permettent pas d'obtenir de façon simple les suites (x_n) et (y_n). C'est pourquoi on peut encourager l'usage d'un tableur ou d'un système permettant la définition de ces suites et la représentations des points (ce qui est le cas de certains logiciels de calcul formel). Attention cependant, les représentations graphiques obtenues avec un tableur ne sont pas orthonormales, à moins d'ajuster manuellement la taille des axes.*

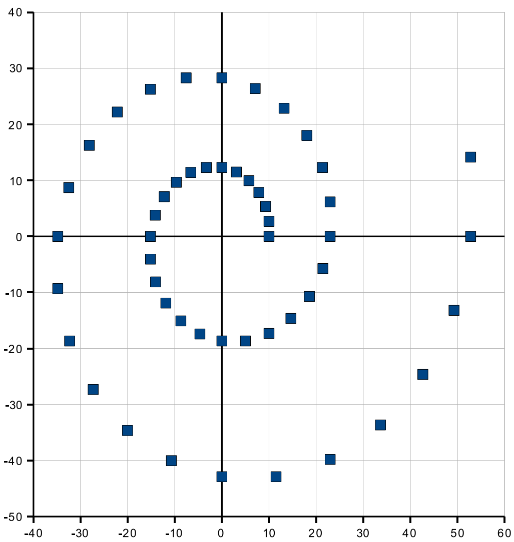
Partie A

1. Placer dans un repère orthonormal adapté les points M_k pour k compris entre 0 et 30.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la figure.

2. Une transformation du plan envoie M_0 sur M_1, M_1 sur M_2 et en général M_k sur M_{k+1}. Formuler une conjecture relative à la nature de cette transformation. En admettant que cette conjecture est vérifiée, essayer de préciser **au moins deux** des caractéristiques de cette transformation à partir de la figure affichée.

   Appeler l'examinateur pour lui proposer la conjecture et certains détails concernant cette transformation.



☞ *On se satisfera, pour commencer, de la notion de similitude directe de centre O. L'angle de la similitude est un peu plus délicat à trouver mais on peut quand même le deviner au moyen du logiciel en notant que x_6 est nul (ou que y_{12} l'est), ce qui amène à penser que l'angle vaut $\frac{\pi}{12}$. On pourra, le cas échéant, faire afficher les demi-droites* $[\mathrm{OM}_1)$ *et* $[\mathrm{OM}_2)$. *Insistons ici sur la logique sous-jacente :* ***s'il est vrai*** *que la transformation est une similitude directe de centre* O, ***alors*** *son angle doit être* $\frac{\pi}{12}$. *Le rapport de la similitude vient par le calcul de* $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, *et peut être mis sous la forme* $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ *; l'écriture précise de ce nombre peut revêtir différents aspects tous acceptables a priori.*

Partie B

3. On note z_n l'affixe du point M_n.
   En établissant une relation entre z_{n+1} et z_n de la forme $z_{n+1} = a.z_n$, démontrer les conjectures précédentes. On pourra chercher le module et l'argument de a^2.

   ☞ *Il s'agit de trouver le module et l'argument du multiplicateur de la similitude* $f(z) = az$. *On conseille en fait à la candidate ou au candidat de s'intéresser à* $f \circ f$ *qui est plus simple que* f. *L'argument de* a^2 *est celui de* $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, *soit* $\frac{\pi}{6}$.

Production demandée

- Réalisation de la figure demandée à l'aide du logiciel.
- Démonstration des conjectures relatives à la transformation.

Compétences évaluées

- Représenter des points, donnés par leur coordonnées, à l'aide d'un logiciel de géométrie, d'un tableur ou de tout autre logiciel adapté.
- Déterminer des éléments caractéristiques d'une similitude plane directe.
- Mener des calculs algébriques sur les nombres complexes.

Un ensemble de points du plan construit à l'aide de deux suites

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'obtenir une figure correcte. Il ne s'agit pas ici de juger de l'efficacité du processus de construction qui dépend fortement du logiciel employé (ou des combinaisons de logiciels : par exemple calculatrice pour calculer une valeur approchée des coordonnées et logiciel de géométrie pour faire afficher les points).	
Le candidat reconnaît une similitude (on appréciera son degré d'autonomie).	
Le candidat a su utiliser les ressources disponibles pour rechercher des caractéristiques de la similitude, le centre en premier lieu, puis l'angle ou le rapport (on appréciera la précision des réponses fournies).	
Le candidat a su prévoir les diverses étapes qui seront nécessaires à la démonstration de sa conjecture.	
Le candidat a su conduire les calculs et a su réaliser la démonstration attendue.	

Remarques complémentaires :

Suites et fonctions

Énoncé

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$. On considère les fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}}{n} - 1 + x\mathrm{e}^{1-x}$$

Partie A

1. À l'aide d'un logiciel adapté, conjecturer, suivant les valeurs de n :
   (a) les variations de f_n.
   (b) le nombre de solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On note α_n et β_n les deux solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation $f_n(x) = 0$ telles que $\alpha_n < \beta_n$.
   (a) Conjecturer, pour tout $x \geqslant 0$, une inégalité entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on alors formuler à propos du sens de variation des suites (α_n) et (β_n), et de leur convergence éventuelle ?
   (c) Quelle propriété semblent vérifier les suites (α_n) et (β_n) ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer le travail réalisé sur le logiciel et pour vérifier les conjectures formulées.

☞ *L'examinateur aidera, sur certaines fonctionnalités, le candidat désirant représenter les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.*

Partie B

3. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, à partir d'une certaine valeur de n, deux solutions distinctes α_n et β_n dans des intervalles que l'on précisera.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   ☞ *Le candidat pourra utiliser le tableau de variation de f_n à partir du graphique. La démonstration pourra être demandée à la fin de l'épreuve.*

   (b) Démontrer que les suites (α_n) et (β_n) sont de monotonies contraires.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   ☞ *Pour aider le candidat à démarrer, l'examinateur l'amenera à utiliser les variations de la fonction f_n.*

   (c) Que peut-on en déduire ?

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   ☞ *On pourra éventuellement pour valoriser le candidat, lui demander de déterminer la limite commune des deux suites.*

Production demandée

- Les différentes conjectures.
- Les démonstrations détaillées des questions 3 (a) et 3 (b).

Compétences évaluées

- Savoir utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions.
- Émettre des conjectures.
- Savoir utiliser le théorème de la bijection.
- Savoir utiliser les théorèmes sur les suites monotones bornées.

Suites et fonctions

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'utiliser un logiciel de géométrie permettant de tracer des courbes de fonctions et, avec une aide éventuelle, pour créer un « curseur ». *Il ou elle tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat est capable de faire des conjectures à partir de ses résultats. *Le candidat tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Le candidat montre un certain nombre de connaissances, de savoir-faire mathématiques sur le sujet : théorème de la bijection, théorèmes sur les suites monotones.	
Le candidat propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :

Étude de la courbe représentative d'une fonction

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
On se propose d'établir une propriété de la courbe $\mathscr{C}$.

1. (a) Représenter la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide d'un outil de géométrie dynamique.

   ☞ *Pour ce sujet un logiciel de calcul formel n'est pas réellement adapté, car il amène des réponses en ordre différent de la progression prévue.*

   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g = f \circ f$ puis conjecturer une expression simple de $g(x)$, pour tout x appartenant à $[0;1]$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des constructions et de la conjecture émise.

2. (a) Placer un point M sur la courbe $\mathscr{C}$, puis construire le point M′ symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

   (b) Quel semble être le lieu du point M′ lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}$?

   (c) Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}$ peut-on alors conjecturer ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification des constructions et des observations faites.

   ☞ *Selon le logiciel utilisé, on pourra donner des indications pour placer un point variable sur un lieu géométrique.*

3. (a) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, exprimer $f \circ f(x)$ en fonction de x.

   (b) En déduire la propriété de la courbe $\mathscr{C}$ observée à la question 2.(c).

   ☞ *On pourra guider l'élève pour retrouver les coordonnées de l'image d'un point par la réflexion d'axe* D.

   ☞ *Si un candidat a rapidement modélisé la situation géométrique et traité la suite, on pourra le mettre en situation de recherche à partir de la distance* MF, *où le point* F *a les coordonnées* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, *et de la distance de* M *à la droite* Δ *d'équation* $y = -x$.

Production demandée

– Réalisation du graphique et construction pour observation du lieu du point M′.
– Démarche de démonstration pour les questions 3.(a) et 3.(b).

Compétences évaluées

- Représenter graphiquement une fonction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Construire un lieu géométrique.
- Savoir déterminer l'expression d'une fonction composée.
- Reconnaitre une bijection réciproque.

Étude de la courbe représentative d'une fonction

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide éventuelle, de tracer des courbes.	
L'élève émet une conjecture sur l'expression de $g(x)$.	
L'élève est capable, avec une aide éventuelle, de construire le lieu du point M'.	
L'élève conjecture la propriété de la courbe $\mathscr{C}$.	
L'élève calcule l'expression de la composée de f *par* f *en tenant compte de l'ensemble de définition.*	
Avec d'éventuelles indications, l'élève propose une démarche de démonstration.	

Remarques complémentaires :

Recherche d'une stratégie de jeu

Énoncé

On dispose de trois urnes, notées A, B et C, contenant chacune 10 jetons indiscernables au toucher :
– l'urne A contient 4 jetons noirs et 6 jetons blancs
– l'urne B contient 7 jetons noirs et 3 jetons blancs
– l'urne C contient 6 jetons noirs et 4 jetons blancs.
Le jeu consiste à extraire successivement un jeton dans chacune des trois urnes, le joueur pouvant choisir d'effectuer ces tirages soit dans l'ordre A puis B puis C soit dans l'ordre A puis C puis B.
Lorsque le jeton extrait de la 2^{e} urne est d'une couleur différente de celui de la 1re, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.
Lorsque le jeton extrait de la 3^{e} urne est d'une couleur différente de celui de la 2^{e}, le joueur gagne un point, sinon il perd un point.

La partie est gagnée si le total des points marqués est égal à 2.
On se propose d'étudier si l'un des deux ordres de tirages proposés est plus favorable au joueur que l'autre.

1. (a) À l'aide d'un tableur, simuler 500 parties de ce jeu, en choisissant l'ordre A puis B puis C, et afficher la fréquence des parties gagnées.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul.

   ☞ *Si le candidat n'arrive pas à simuler les tirages dans l'urne, on pourra lui fournir une aide progressive, lui indiquer comment utiliser la fonction* `SI(condition ; valeur si vrai ; valeur si faux)` *(voire d'autres fonctions du tableur selon l'approche choisie), comment simuler l'événement : « extraire un jeton noir de l'urne A »*

   (b) Compléter la feuille de calcul par la simulation de 500 parties réalisées dans l'ordre A puis C puis B, et afficher la fréquence des parties gagnées.

   ☞ *Si le candidat n'arrive pas à dénombrer les parties gagnantes, on lui indiquera une formule de comptage des cellules comportant la valeur 2.*

   (c) Réaliser ainsi 10 simulations de 500 parties dans chacune des deux stratégies de jeu envisagées et compléter le tableau par la fréquence des parties gagnées, exprimée sous forme décimale approchée à 0,01 près.

Simulation n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Première stratégie										
Deuxième stratégie										

   Les résultats obtenus permettent-ils de conjecturer si l'une des deux stratégies de jeu envisagées est plus favorable que l'autre pour le joueur ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la feuille de calcul et lui proposer une conjecture.

2. Déterminer la probabilité de gagner une partie en appliquant l'une ou l'autre des stratégies de jeu. La conjecture émise est-elle validée ?

Production demandée

– Réalisation de la simulation.
– Réponse argumentée à la question 2.

Compétences évaluées

– Simuler une expérience aléatoire.
– Calculer des probabilités.
– Émettre une conjecture et la confronter au résultat théorique.

Recherche d'une stratégie de jeu

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable, avec une aide, de simuler un tirage d'un jeton dans une urne.	
L'élève est capable de simuler une partie du jeu selon une des deux stratégies décrites.	
L'élève est capable de réaliser un échantillon de taille 500 et de faire calculer la fréquence des situations gagnantes.	
L'élève tire profit des indications données à l'oral : ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu.	
L'élève effectue les calculs de probabilité pour chaque stratégie.	
L'élève fait preuve d'esprit critique en comparant les calculs de probabilités avec l'observation des échantillons.	

Remarques complémentaires :

Étude d'une figure du plan

Énoncé

Soit un triangle équilatéral direct ABC et soit D un point du segment [BC]. La parallèle à la droite (AC) menée par D coupe la droite (AB) en E et la parallèle à la droite (AB) menée par D coupe la droite (AC) en F. Soit le point G, centre de gravité du triangle ABC et les points H et A′, symétriques de G et A par rapport à la droite (BC). On définit les points I et J centres de gravité respectifs des triangles BDE et CDF.
On se propose d'étudier la nature du triangle HIJ quand D décrit le segment [BC].

1. (a) Représenter la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   ☞ *La construction de la figure est un peu longue mais elle ne présente pas de difficultés. En cas de besoin, l'examinateur pourra renvoyer l'élève à la définition des éléments à construire.*

   (b) Quelle semble être la nature du triangle HIJ ?

   (c) Visualiser les lieux des points I et J lorsque le point D décrit le segment [BC].

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.
   Lui proposer les conjectures émises concernant le triangle HIJ
   et les lieux des points I et J.

   ☞ *L'examinateur s'assurera que l'élève connaît une procédure pour afficher le lieu d'un point. Il vérifiera que le point D décrit bien le segment [BC]. Il fera préciser la figure obtenue lorsque D = B ou D = C.*

2. On définit les similitudes directes S_1, de centre C, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et S_2, de centre B, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et leur commposée $f = S_2 \circ S_1$.

   (a) Déterminer les images de J et H par f.

   (b) Déterminer la nature et des éléments caractéristiques de f.

   (c) En déduire la nature du triangle HIJ.

   ☞ *Cette question est relativement longue. Toute méthode même incomplète, sera valorisée.*

Production demandée

– Réalisation de la figure.
– Réponse argumentée à la question 2.

Compétences évaluées

- Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- Visualiser un lieu de points et émettre une conjecture sur sa nature.
- Utiliser des notions de géométrie élémentaire dans le plan : centre de gravité, longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral,. . .
- Connaitre les propriétés des similitudes (notamment, leurs composées).

Étude d'une figure du plan

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève est capable de représenter la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. La construction du triangle HIJ *est attendue.* *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
L'élève est capable d'expérimenter, de faire des essais pour émettre et contrôler une conjecture sur la nature du triangle HIJ. *Il est capable de représenter et d'interpréter le lieu des points* I *et* J. *L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral.*	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable d'affiner ses explorations en étudiant la figure et les transformations pouvant être utilisées dans la démonstration.	
L'élève montre un certain nombre de connaissances et de savoir-faire mathématiques sur les similitudes.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice en tirant profit de ses observations.	

Remarques complémentaires :

Suites définies conjointement

Énoncé

Soit a un nombre réel non nul. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\mathrm{U}_0 = a \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_0 = -\frac{3}{4}a$$
$$\mathrm{U}_{n+1} = \frac{1}{5}(\mathrm{U}_n + 4\mathrm{V}_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_{n+1} = \frac{1}{5}(3\mathrm{U}_n + 2\mathrm{V}_n)$$

Partie A

1. (a) En utilisant un logiciel adapté, calculer et représenter graphiquement les 30 premiers termes de chacune de ces suites pour diverses valeurs du réel a.

   (b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n). Cette limite dépend-elle de la valeur du réel a ?

   (c) Mêmes questions pour la suite (V_n).

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures trouvées.

   ☞ *Le sujet peut être traité à l'aide de divers outils, le plus «ordinaire» est le tableur ; c'est pourquoi le terme «feuille de calcul» est employé dans l'énoncé. Si le candidat traite le sujet avec une calculatrice graphique peu avancée, il risque de rencontrer une première difficulté pour introduire le paramètre a et un problème au moment de la définition de la suite (W_n). En effet sur la plupart des outils il convient de définir W_n en fonction de U_{n-1} et V_{n-1}. Lorsque le sujet sera donné à des élèves n'ayant pas d'autres possibilités que l'emploi de la calculatrice, ces difficultés devront être anticipées par l'enseignant.*

2. Il s'agit maintenant de conjecturer la possibilité pour la suite (U_n) d'être arithmétique ou géométrique.

   (a) Adapter la feuille de calcul pour aider à effectuer une conjecture sur la nature de (U_n).

   (b) Procéder de même pour conjecturer la nature de la suite (V_n).

   (c) On considère la suite (W_n) définie par $\mathrm{W}_n = 3\mathrm{U}_n + 4\mathrm{V}_n$. Adapter la feuille de calcul précédente pour conjecturer une propriété de la suite (W_n).

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie les conjectures sur la nature de chaque suite.
   Lui indiquer comment il est possible de démontrer la conjecture relative à la suite W_n.

   ☞ *L'examinateur vérifiera la correction des conjectures, en cas d'erreur il pourra suggérer des pistes de vérification. Pour la démonstration de la constance de (W_n) une simple indication de méthode est attendue.*

Partie B

3. (a) Démontrer la conjecture relative à la suite (W_n).
   (b) En déduire U_{n+1} en fonction de U_n puis la limite de la suite (U_n).

Production demandée

– La feuille ou le procédé de calcul construit permettant les conjectures des questions 1. et 2.
– La démonstration de la question 3.(b).

Compétences évaluées

– Afficher, au moyen d'un tableur, les premiers termes de suites obtenues par des opérations algébriques simples sur les termes de suites déjà connues.
– Émettre et tester des conjectures.
– Connaitre les propriétés des suites arithmétiques et géométriques.
– Savoir étudier la convergence d'une suite.

Suites définies conjointement

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
Le candidat est capable d'obtenir les termes des suites (U_n) *et* (V_n) *pour diverses valeurs de a.*	
Le candidat est capable d'adapter la feuille de calcul pour conjecturer la nature des suites. Il sait reconnaître que la suite (W_n) *est constante.*	
Le candidat est capable d'indiquer une méthode de démonstration de la constance de la suite (W_n).	
Le candidat est capable de produire la démonstration de la convergence de (U_n).	

Remarques complémentaires :

Cryptage et décryptage d'un message

Énoncé

Préliminaire : *on se réfère dans ce sujet à un langage de programmation capable de traiter des nombres entiers et des caractères, ce qui est le cas de la plupart des langages y compris ceux que fournissent certaines calculatrices programmables. En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère un code numérique qui est un entier compris entre 0 et 255. Ainsi, le code de @ vaut 64, celui de A est 65, etc.*

Questions de syntaxe : *dans la plupart des langages de programmation il existe une fonction appelée* `chr()` *ou* `char()` *ou* `car()` *et qui renvoie un caractère à partir de son code ASCII. On entre donc par exemple* `chr(65)` *pour obtenir la lettre A. La fonction réciproque est souvent nommée* `asc()` *ou* `ord()`*, de sorte qu'on tape* `ord("A")` *ou* `asc('A')` *(selon le langage) pour obtenir le nombre 65.*

Pour simplifier ce qui suit, *nous conviendrons de nous limiter à un sous-alphabet formé des lettres majuscules de A à Z et du caractère @ pour marquer les espaces. Dans ces conditions, la formule* `ord(c)-64` *renvoie un nombre compris entre 0 et 26 si la variable* `c` *contient une lettre de notre mini-alphabet.*

1. **Codage.**
   (a) En utilisant le codage décrit ci-dessus, coder le message suivant :

   BONJOUR@A@TOUS

   On définira un tableau pour ranger les lettres et un autre pour le codage du message.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer l'écran du logiciel après remplissage.

   ☞ *On s'assurera que la connaissance des fonctions requises n'est pas un obstacle, et on fournira, le cas échéant, des indications pour le remplissage du tableau afin de pouvoir continuer.*

   (b) On va crypter (chiffrer) le message au moyen de la fonction C qui, à tout n entier appartenant à $[0;26]$ associe le reste $C(n)$ de la division de $13n$ par 27. Adapter la procédure réalisée en 1.(a) pour obtenir les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n, puis en déduire la lettre correspondante.

   ☞ *Le début du message codé a l'allure suivante :*

B	O	N	J	O	U	R	@	A	@	T	O	U	S
26	20	22					0						
Z	F	T					@						

   Appeler l'examinateur pour validation des résultats.

   ☞ *La fonction « reste de division » a un nom variable selon les langages de programmation, ce peut être* `mod( , )` *ou encore* `irem( , )` *etc.*
   La réponse attendue (sous forme de lettres) est : ZFTVFCR@M@QFCD

2. **Décodage.** Notons D la fonction qui, à tout entier k appartenant à $[0;27]$, associe le reste de la division de $25k$ par 27. À partir des nombres cryptés trouvés précédemment, retrouver le message originel en utilisant la fonction D.

Appeler l'examinateur pour vérification du résultat.

☞ *On laissera ici à l'élève l'initiative de construire seul le décodage en s'appuyant sur la technique ayant permis le codage à la question précédente. On pourra se contenter de la liste d'entiers 2,15,14,10,15,21,18,0,1,0,20,15,21,19.*

3. **Amélioration.** Le codage proposé ci-dessus est rudimentaire, notamment parce que le caractère d'espacement @ est invariant. On modifie donc la fonction C ainsi : $\mathrm{C}(n)$ = reste de la division de $13n + 8$ par 27. Comment faut-il modifier la fonction D ?

Appeler l'examinateur pour lui proposer une réponse éventuelle à cette question.

☞ *On valorisera la réponse* `mod`$(25n+16;27)$ *(qui peut être trouvée de diverses manières), et plus encore le nouveau codage qui est GNACNKZHUHYNKL.*

4. **Justification du codage.** Pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts. Il faut donc s'assurer que le cryptage choisi au 1.(b) code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 26, par deux nombres distincts.
   (a) Montrer que, si $\mathrm{C}(n) = \mathrm{C}(p)$ alors 27 divise $13(n - p)$.

   ☞ *La démonstration est évidemment plus simple si on utilise les propriétés des congruences.*

   (b) En déduire que $n = p$ puis que le codage est valide.

   ☞ *Ici le théorème de Gauss est attendu (ainsi que la maîtrise des contraposées)*

   ☞ *Si le candidat présente une certaine aisance dans les démonstrations, l'examinateur pourra pour le valoriser lui proposer la démonstration du décodage : montrer que pour tout entier n on a $13 \times (25n) \equiv n$ modulo 27 et expliquer pourquoi la fonction* D*, qui associe à k le reste de la division de $25k$ par 27, assure le décryptage attendu.*

Production demandée

- Écrire le message codé et le message décodé.
- Justifications demandées aux questions 4.(a) et 4.(b).

Compétences évaluées

- Utiliser quelques fonctions d'un langage de programmation (reste d'une division euclidienne, etc.).
- Remplir un tableau à une dimension avec des valeurs entières ou des caractères.
- Utiliser les propriétés sur les congruences, la division euclidienne, les nombres premiers entre eux.

Cryptage et décryptage d'un message

Nom: **Prénom:** **Note:**

On ne cherchera pas à noter chacune des compétences. Pour établir la note finale on prendra en compte les performances globales du candidat en respectant la grille de lecture suivante:

– *La capacité à expérimenter (qui prend en compte de façon dialectique les performances dans l'utilisation des outils et la faculté de proposer des conjectures) doit représenter les trois quarts de la note initiale.*
– *La capacité à rendre compte des résultats établis à partir de cette expérimentation (démonstration, argumentation, etc.) représentera le quart restant.*
– *La capacité à prendre des initiatives et à tirer profit des échanges avec l'examinateur sera globalement pris en compte de façon substantielle.*

Il n'est pas nécessaire qu'une compétence soit totalement maitrisée pour être considérée comme acquise. Les exemples ci-dessous ne sont pas exhaustifs.

Compétences évaluées	***Éléments permettant de situer l'élève (à remplir par l'examinateur)***
L'élève comprend l'énoncé et est capable de faire quelques essais à la main ou avec sa calculatrice.	
L'élève est capable, avec une aide éventuelle, d'écrire une procédure utilisant les itérations dans le langage de programmation choisi.	
En utilisant son programme, l'élève est capable d'émettre des conjectures.	
L'élève tire profit des indications éventuellement données à l'oral ; ces indications peuvent être des aides logicielles nécessaires pour réaliser ce qu'il ou elle a prévu.	
Suite à un éventuel questionnement oral, l'élève est capable d'exposer sa démarche pour la démonstration.	
L'élève propose une résolution correcte de l'exercice, en tirant profit des résultats observés.	

Remarques complémentaires :