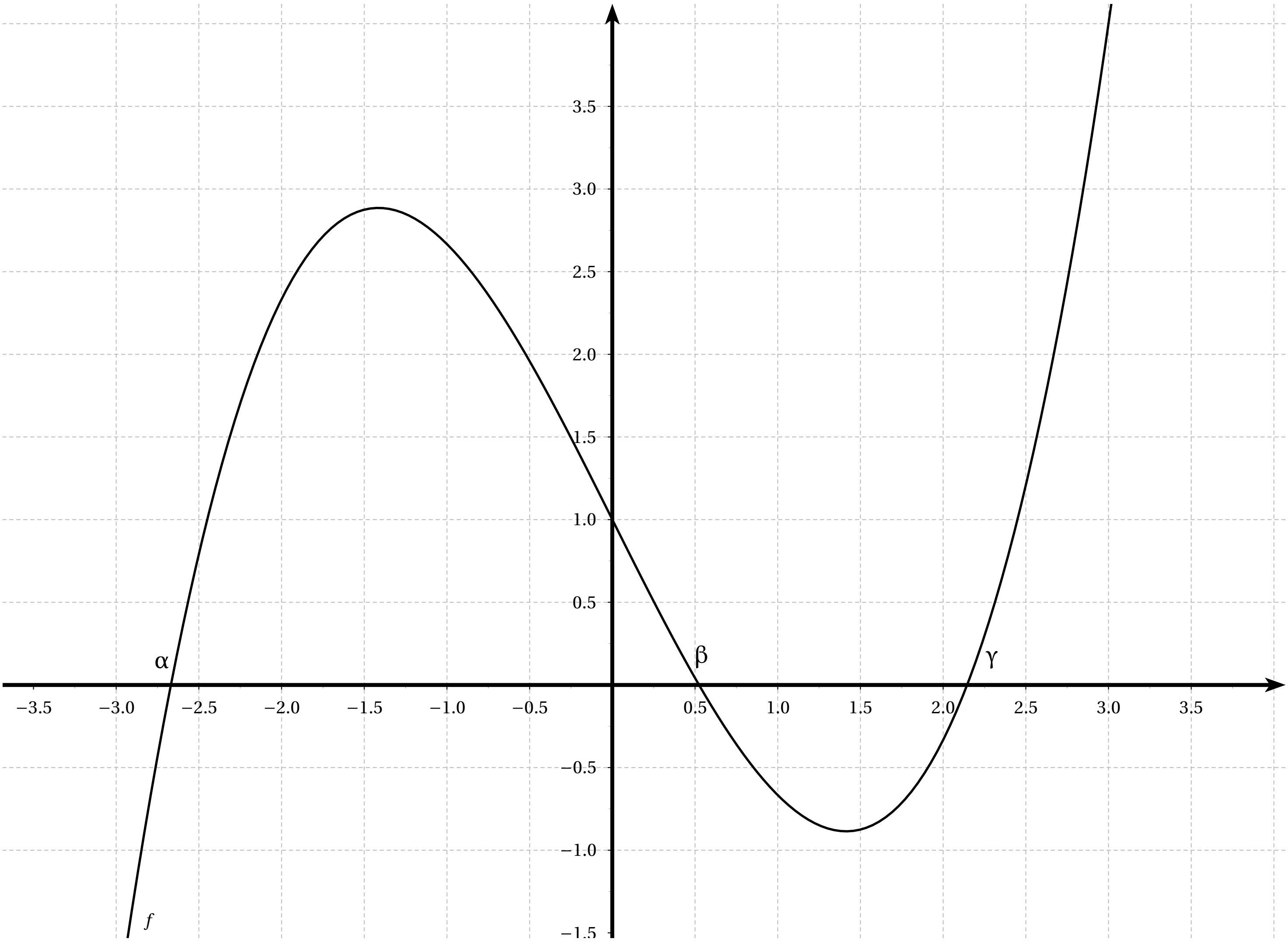
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x + 1$ et sa courbe représentative dans le repère suivant :



On appelle α, β et γ les trois solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Dans la suite, on s'intéresse tout d'abord à la recherche de valeurs approchées de γ.

On pose $a_0 = 3$

1. (a) Sans faire aucun calcul, tracer la tangente T_{a_0}. Elle coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée a_1.

   (b) Toujours sans aucun calcul tracer la tangente T_{a_1}. Elle coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est notée a_2. Faire bien apparaître a_0, a_1 et a_2 sur l'axe des abscisses. Que remarquez-vous ?

2. En suivant le principe décrit à la question 1, on définit de proche en proche les nombres a_2, a_3, etc... c'est-à-dire une suite (a_n).

   (a) Déterminer l'équation réduite de T_{a_0} *(Attention, il ne faut pas remplacer a_0 par sa valeur : 3).*

   (b) En utilisant le fait que la tangente T_{a_0} coupe l'axe des abscisses en a_1, justifier la relation suivante entre a_1 et a_0 :

   $$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

   (c) Préciser, de manière analogue, une relation entre a_{n+1} et a_n pour tout entier n.

3. On considère l'algorithme suivant écrit en langage python :

```
from decimal import Decimal, getcontext
getcontext().prec = 81

def f(x) :
    return x**3/3 - 2 * x + 1
def deriveef(x) :
    return x**2 - 2

a=3
for i in range(9) :
    a = a - f(a)/deriveef(a)
    print(a)
```

   (a) Exécuter cet algorithme dans EduPython.

   (b) Que représentent les nombres affichées ?

   (c) Observer attentivement les décimales de ces nombres ? Quels phénomènes observe-t-on ?

   Remarque : au-delà la stabilisation des decimales que les élèves remarqueront, il faut leur faire voir que le nombre de décimales stabilisées double à chaque fois : c'est l'intérêt fondamental de la méthode de Newton.

   (d) Faire une conjecture sur les 80 premières décimales exactes de γ.

4. Adapter l'algorithme précédent afin d'obtenir les 80 premières décimales exactes de α et β.