TP: Approximation de la racine de 2

Problématique : comment approximer la racine carrée d'un nombre entier qui ne soit pas un carré par exemple 2 ?

Nous avons vu en cours que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel néanmoins on va découvrir un algorithme qui permet d'encadrer de manière aussi précise que l'on veut $\sqrt{2}$.

1. Considérons un rectangle de longueur L et de largeur ℓ ayant une aire égale à 2.
   Justifier l'encadrement suivant : $\ell < \sqrt{2} < \mathrm{L}$.
   Indication : Faire un raisonnement par contraposée.
2. Afin d'obtenir un encadrement plus fin, les mathématiciens grecs ont eu l'idée de rendre le rectangle un peu plus carré tout en conservant son aire égale à 2. Voici un exemple pour fixer les idées :

   Rectangle d'aire égale à 2 de longueur L et de largeur ℓ :

   L
   Aire= 2 ℓ

   Rectangle un peu plus carré d'aire égale à 2 de longueur L' et de largeur ℓ' :

   L'
   Aire= 2 ℓ'

   La nouvelle longueur L' est définie de la façon suivante : $\mathrm{L}' = \dfrac{\mathrm{L}+\ell}{2}$.

   (a) Comment est alors définie la nouvelle largeur ℓ' ? Vérifier que $\ell' = \dfrac{4}{\mathrm{L}+\ell}$.
   (b) Justifier que : $\mathrm{L}' < \mathrm{L}$ et en déduire que : $\ell < \ell' < \sqrt{2} < \mathrm{L}' < \mathrm{L}$.
   (c) L'encadrement $\ell' < \sqrt{2} < \mathrm{L}'$ est-il plus précis que l'encadrement de départ : $\ell < \sqrt{2} < \mathrm{L}$?
   (d) Prenons $\ell = 0,5$ et $\mathrm{L} = 4$.
   Calculer L' et ℓ' et en déduire un nouvel encadrement de $\sqrt{2}$.
   (e) Déterminer en réitérant une fois de plus l'algorithme un encadrement plus fin de $\sqrt{2}$.
   (f) Voici la liste des rectangles obtenus si on réitère le processus 4 fois depuis le départ :

   4
   Aire= 2 0,5 | Aire= 2 | Aire= 2 | Aire= 2 | Aire= 2

   Que remarquez-vous ?
3. On considère l'algorithme suivant définie sous la forme d'une fonction :

```
def encadrements(L,n) :

    listeL=[L]
    ℓ=2/L
    listeℓ=[ℓ]
    for i in range(n) :          # pour i allant de 0 à n−1
        L = (L+ℓ)/2
        ℓ = 2/L
        listeL=listeL+[L]
        listeℓ=listeℓ+[ℓ]

    return listeℓ, listeL
```

   (a) Combien de fois sont-exécutées les instructions dans la boucle de l'algorithme ?

(b) Saisir et exécuter la fonction dans EduPython avec $L = 4$ et $n = 2$.

(c) Que représentent les valeurs des listes obtenues ?

(d) Editer et exécuter la fonction sous EduPython en prenant $L = 4$ et $n = 6$. Regarder attentivement à chaque étape de la boucle les décimales communes de ℓ et L. Que remarquez-vous ?

(e) Comment semble évoluer le nombre de décimales communes de ℓ et L à chaque exécution de la boucle ?

(f) Que représentent les décimales communes de ℓ et L pour $\sqrt{2}$?

4. On considère l'algorithme suivant défini sous la forme d'une fonction :

```
from decimal import Decimal, getcontext
getcontext().prec = 50

encadrement-test-arret(L,a) :
    L=Decimal(L)
    ℓ=2/L
    while L − ℓ > a :
        L = (L + ℓ)/2
        ℓ = 2/L

    return ℓ, L
```

(a) Quel est le rôle de cette fonction ?

(b) Saisir et exécuter la fonction dans Edupython avec $L = 4$ et $a = 10^{-20}$.

(c) En déduire le nombre de décimales exactes de $\sqrt{2}$ que l'on obtient dans ce cas.