

Problématique : comment approximer la racine carrée d'un nombre entier qui ne soit pas un carré par exemple 2?

Nous avons vu en cours que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel néanmoins on va découvrir un algorithme qui permet d'encadrer de manière aussi précise que l'on veut  $\sqrt{2}$ .

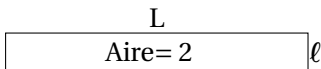
1. Considérons un rectangle de longueur L et de largeur  $\ell$  ayant une aire égale à 2.

Justifier l'encadrement suivant :  $\ell < \sqrt{2} < L$ .

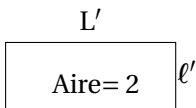
*Indication : Faire un raisonnement par contraposée.*

2. Afin d'obtenir un encadrement plus fin, les mathématiciens grecs ont eu l'idée de rendre le rectangle un peu plus carré tout en conservant son aire égale à 2. Voici un exemple pour fixer les idées :

Rectangle d'aire égale à 2 de longueur L et de largeur  $\ell$  :

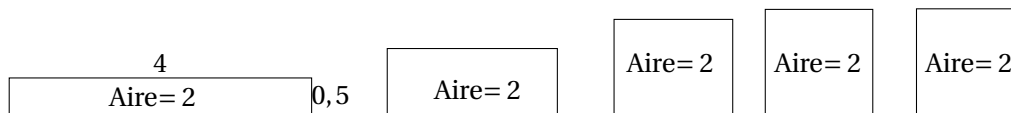


Rectangle un peu plus carré d'aire égale à 2 de longueur  $L'$  et de largeur  $\ell'$  :



La nouvelle longueur  $L'$  est définie de la façon suivante :  $L' = \frac{L + \ell}{2}$ .

- (a) Comment est alors définie la nouvelle largeur  $\ell'$ ? Vérifier que  $\ell' = \frac{4}{L + \ell}$ .
- (b) Justifier que :  $L' < L$  et en déduire que :  $\ell < \ell' < \sqrt{2} < L' < L$ .
- (c) L'encadrement  $\ell' < \sqrt{2} < L'$  est-il plus précis que l'encadrement de départ :  $\ell < \sqrt{2} < L$ ?
- (d) Prenons  $\ell = 0,5$  et  $L = 4$ .  
Calculer  $L'$  et  $\ell'$  et en déduire un nouvel encadrement de  $\sqrt{2}$ .
- (e) Déterminer en réitérant une fois de plus l'algorithme un encadrement plus fin de  $\sqrt{2}$ .
- (f) Voici la liste des rectangles obtenus si on réitère le processus 4 fois depuis le départ :



Que remarquez-vous?

3. On considère l'algorithme suivant définie sous la forme d'une fonction :

```
def encadrements(L,n) :
    listeL=[L]
    l=2/L
    listeL=[l]
    for i in range(n) :      # pour i allant de 0 à n - 1
        L = (L + l)/2
        l = 2/L
        listeL=listeL+[L]
        listeL=listeL+[l]

    return listeL, listeL
```

- (a) Combien de fois sont-exécutées les instructions dans la boucle de l'algorithme?

- (b) Saisir et exécuter la fonction dans EduPython avec  $L = 4$  et  $n = 2$ .
  - (c) Que représentent les valeurs des listes obtenues?
  - (d) Editer et exécuter la fonction sous EduPython en prenant  $L = 4$  et  $n = 6$ . Regarder attentivement à chaque étape de la boucle les décimales communes de  $\ell$  et  $L$ . Que remarquez-vous?
  - (e) Comment semble évoluer le nombre de décimales communes de  $\ell$  et  $L$  à chaque exécution de la boucle?
  - (f) Que représentent les décimales communes de  $\ell$  et  $L$  pour  $\sqrt{2}$ ?
4. On considère l'algorithme suivant défini sous la forme d'une fonction :

```
from decimal import Decimal, getcontext
getcontext().prec = 50

encadrement-test-arret(L,a) :

    L=Decimal(L)
    ℓ=2/L
    while L - ℓ > a :
        L = (L + ℓ)/2
        ℓ = 2/L

    return ℓ, L
```

- (a) Quel est le rôle de cette fonction?
- (b) Saisir et exécuter la fonction dans Edupython avec  $L = 4$  et  $a = 10^{-20}$ .
- (c) En déduire le nombre de décimales exactes de  $\sqrt{2}$  que l'on obtient dans ce cas.