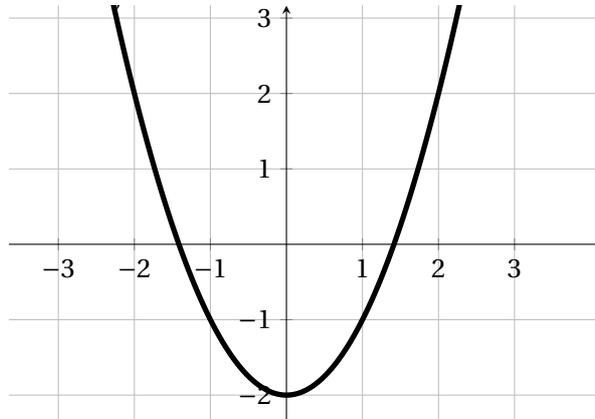


On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 2$$

et sa courbe représentative dans le repère suivant :



1. Justifier que $\sqrt{2}$ est l'unique solution positive de l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer graphiquement un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux entiers consécutifs.
3. On cherche un encadrement plus fin d'amplitude 0, 1.

On commence par définir la fonction f suivante en langage python :

```
def f(x) :  
    return x*x-2
```

Puis on considère l'algorithme suivant, sous forme d'une fonction, en langage python :

```
def tabval(a,pas,n) :  
    Lx=[]  
    Ly=[]  
    for i in range(n + 1) :           # Pour i allant de 0 à n  
        x = a + i * pas  
        y = round(f(x),2)           # valeur arrondie de f(x) à 0,01 près  
        Lx=Lx+[x]  
        Ly=Ly+[y]  
    return Lx,Ly
```

- (a) Saisir respectivement les deux fonctions précédentes dans Edupython.
- (b) Exécuter la fonction avec $a = 1$, $pas = 0,1$ et $n = 10$.
- (c) En déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 0, 1.
- (d) Modifier le pas et a afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01.

4. On considère l'algorithme suivant définie sous la forme d'une fonction donnant directement un encadrement de $\sqrt{2}$:

```
def encadrement(a,pas) :  
    while f(a) * f(a + pas) > 0 :  
        a = a + pas  
    return a, a + pas
```

- (a) Saisir la fonction dans Edupython et exécuter la avec $a = 1$ et $pas = 0,1$ et vérifier que l'encadrement obtenu est celui trouvé à la question 3)c).
- (b) A quoi sert la condition $f(a) * f(a + pas) > 0$ dans la boucle while?
- (c) Exécuter la fonction avec $a = 1$ et $pas = 0,01$ et vérifier que l'encadrement obtenu est celui trouvé à la question 3)d).
- (d) Exécuter la fonction avec $a = 1$ et $pas = 10^{-9}$: que remarquez-vous? Pourriez-vous expliquer ce qui se passe? Quel est le nombre maximal de fois que la boucle while est exécutée?
5. On va optimiser l'algorithme précédent afin d'obtenir un encadrement d'une amplitude de 10^{-n} où n est un entier naturel. Pour cela, on considère l'algorithme suivant défini sous la forme d'une fonction :

```
def encadrement-optimise(a,n) :  
    for i in range(n + 1) :      # Pour i allant de 0 à n  
        pas=10 * *(-i)  
        while f(a) * f(a + pas) > 0 :  
            a = a + pas  
    return(a,a+pas)
```

- (a) Saisir la fonction dans Edupython et exécuter la avec avec $a = 1$ et $n = 9$. Vérifier que l'encadrement obtenu est identique à celui trouvé à la question 4)d).
- (b) Quel est le nombre maximal de fois que la boucle est exécutée?