Une équation diophantienne

On cherche à résoudre en nombres entiers l'équation :

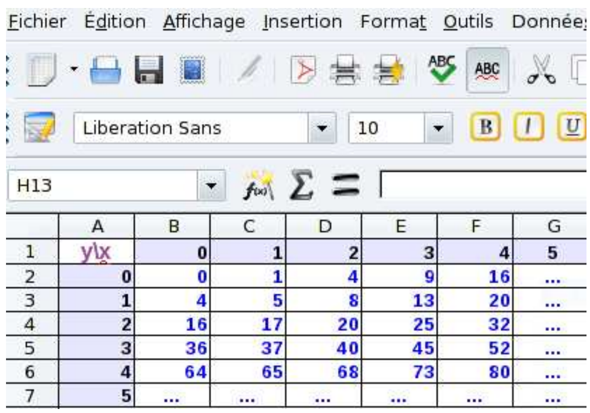
$$x^2 + 4y^2 = 8633.$$

1 Approche par les TICE

1.1 Avec le tableur

Construire un tableau à double entrée (x, y) puis évaluer la quantité $x^2 + 4y^2$.

N.B. : la recopie automatique de la formule d'une cellule à l'autre nécessite une utilisation judicieuse du symbole \$...



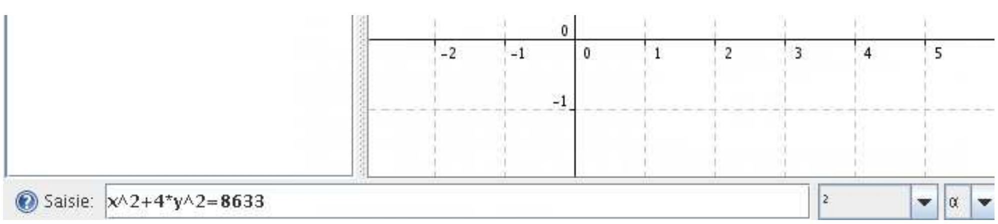
	A	B	C	D	E	F	G
1	y\x	0	1	2	3	4	5
2	0	0	1	4	9	16	...
3	1	4	5	8	13	20	...
4	2	16	17	20	25	32	...
5	3	36	37	40	45	52	...
6	4	64	65	68	73	80	...
7	5	...	...	...	...	...	...

Comment lire les solutions de l'équation ? On pourra penser à une **Mise en forme conditionnelle** pour faire apparaître 8633 en rouge par exemple. Peut-on s'assurer de les trouver toutes ?

1.2 Avec Geogebra

Ecrire directement dans la **fenêtre de saisie** l'équation (Geogebra sait tracer les courbes données par une équation polynomiale à deux variables de degré deux, les "coniques").

Faire apparaître la **grille** de Geogebra (menu `Affichage` $\longrightarrow$ `Grille`).



En quoi cette grille permet de visualiser des solutions de l'équation ? Peut-on s'assurer de les trouver toutes ?

2 Résolution par l'algèbre

1. Montrer que si on connaît une solution (x, y), on en connaît trois autres. En déduire que l'on peut se restreindre à choisir x et y naturels.
2. Soit $(x; y)$ une solution. Montrer que ni x ni y ne peuvent être arbitrairement grands.
3. Calculer 89×97 et en déduire tous les diviseurs naturels de 8633.
4. Montrer que 89 et 97 s'écrivent comme *sommes de deux carrés*, c'est-à-dire qu'il existe des entiers a, b, u, v tels que :
$$89 = a^2 + b^2 \qquad \text{et} \qquad 97 = u^2 + v^2.$$
5. Soit a, b, u, v des entiers. Etablir *l'identité de Lagrange* :
$$(au + bv)^2 + (bu - av)^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2),$$
ainsi que :
$$(au - bv)^2 + (bu + av)^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2),$$
6. En déduire des solutions à l'équation de départ. L'équation est-elle alors résolue ?

3 Prolongement

On peut reprendre le travail ci-dessus avec l'équation $x^2 - 4y^2 = 8633$.

La résolution directe par l'algèbre est grandement facilitée si on remarque une identité remarquable salvatrice...