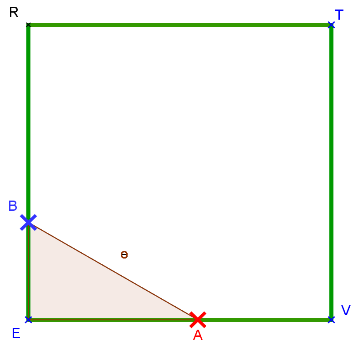
Second degré.
Problème des randonneurs.

Fiche élève

Deux marcheurs A et B effectuent une randonnée sur un circuit carré VERT de 10 km de côté en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.
A l'instant t=0 le randonneur A est en V et marche vers E à la vitesse constante de 4 km/h.
Au même instant le randonneur B est en E et marche vers R à la vitesse constante de 3 km/h.



Partie A

Les deux marcheurs communiquent avec des talkies-walkies de portée maximale 6km.
Pourront-ils se parler pendant cette marche de 10 km ?
On pourra s'aider d'un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer.

Partie B

1. Déterminer le temps mis par le marcheur A pour atteindre le point E. On donnera le résultat en heures, puis en minutes.
2. Etablir que le carré de la distance à « vol d'oiseau », en kilomètres, entre les deux randonneurs, à l'instant t exprimé en heures, est donné par :
   $f(t) = 25t^2 - 80t + 100$ pour tout $t \in [0;2,5]$.
3. En utilisant la forme canonique de f(t) (on pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel), déterminer le minimum de cette distance sur l'intervalle $[0;2,5]$.
4. Conclure.

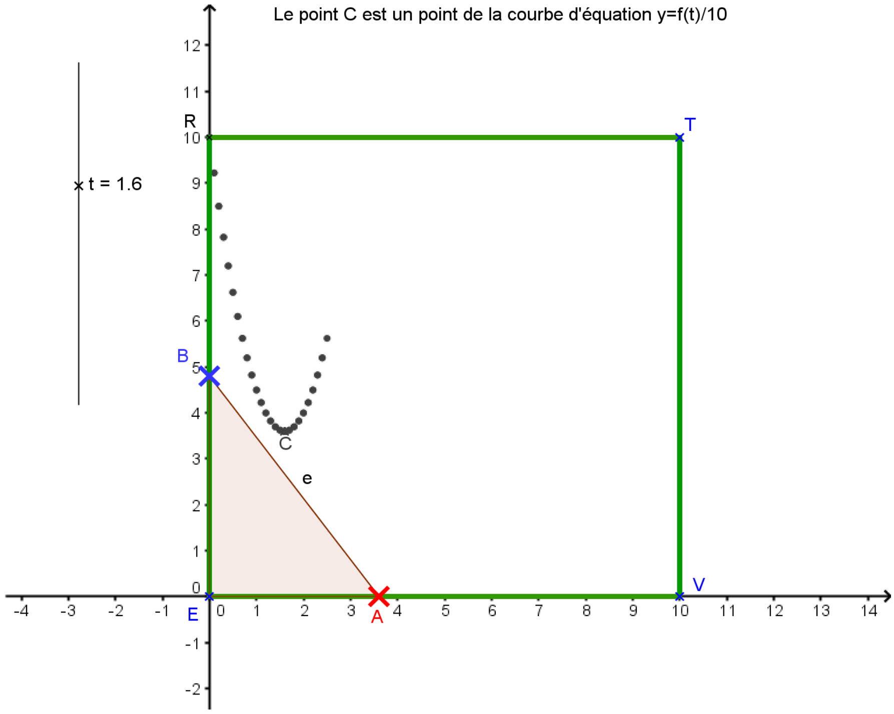
Partie C

Les deux marcheurs sont maintenant équipés de talkies-walkies d'une portée maximale de 6,5 km.

1. Résoudre dans $[0;2,5]$ l'inéquation $f(t) \leq (6,5)^2$.
2. En déduire la plage horaire pendant laquelle ils pourront communiquer.

Fiche professeur

Partie A



Avec le logiciel Géogebra on peut conclure que les marcheurs pourront se parler à l'instant t avec t=1,6 h.

Partie B

1. $t(h) = \dfrac{d(km)}{v(km/h)}$ par conséquent $t = \dfrac{10}{4} \Leftrightarrow t = 2,5$. Pour atteindre le point E le randonneur A marchera pendant 2,5 heures soit 150 minutes.
2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AEB on obtient l'égalité : $AB^2 = AE^2 + EB^2 \Leftrightarrow f(t) = (10-4t)^2 + (3t)^2 \Leftrightarrow f(t) = 25t^2 - 80t + 100$ pour tout $t \in [0;2,5]$.
3. ***Avec le logiciel de calcul formel Xcas*** on détermine la forme canonique de f(t) ;

$f(t) = 25(t - \dfrac{8}{5})^2 + 36$. Le minimum de f est obtenu quand $25(t - \dfrac{8}{5})^2 = 0$, il est donc égal à 36. Le minimum de cette distance AB est donc $\sqrt{36}$ c'est-à-dire 6 à l'instant $\dfrac{8}{5}$ soit 1,6.

4. Les randonneurs pourront communiquer à l'instant t_0 (en heure) avec $t_0 = 1,6$.

Partie C

1. Pour tout $t \in [0;2,5]$, on résout l'inéquation $f(t) \le (6,5)^2$,

   $f(t) \le (6,5)^2 \Leftrightarrow 25t^2 - 80t + 57,75 \le 0$.

Soit $g(t) = 25t^2 - 80t + 57,75$ ($\Delta = 625 > 0$ donc deux racines distinctes $t_1 = 1,1$ et $t_2 = 2,1$). On peut donc en déduire le signe du trinôme g(t).

t	0		1,1		2,1		2,5
Signe de g(t)		+	0	-	0	+	

L'ensemble solution de $f(t) \le (6,5)^2$ est donc l'intervalle fermé $[1,1;2,1]$.

2. Les randonneurs pourront communiquer pendant une heure, entre l'instant 1,1 et l'instant 2,1.