

Activité n° 1 sur le second degré

FICHE ELEVE

A l'approche de Noël, une fabrique artisanale de jouets en bois vend toute sa production. Le bénéfice qu'elle réalise pour la fabrication et la vente de x centaines de jouets est donné, en milliers d'euros, par la formule :

$$B(x) = -2x^2 + 9x - 7 \quad (x \geq 0)$$

1^{ère} partie : Conjectures

A l'aide d'un grapheur, construire la courbe représentative de la fonction B dans un repère. Par lecture graphique, déterminer combien de jouets cette fabrique doit produire :

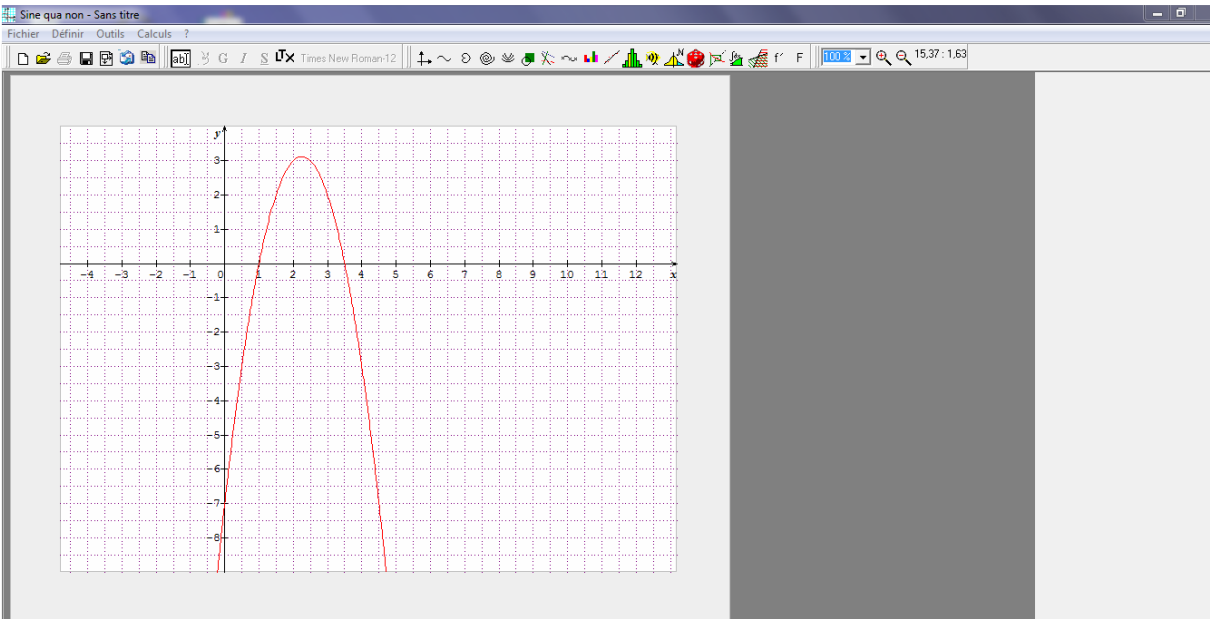
- 1) Pour réaliser un bénéfice.
- 2) Pour réaliser un bénéfice de 2000 €.
- 3) Pour réaliser un bénéfice maximal ainsi que la valeur de celui-ci.

2^{ème} partie : Preuve

Répondre aux questions précédentes par le calcul et avec l'aide d'un logiciel de calcul formel.

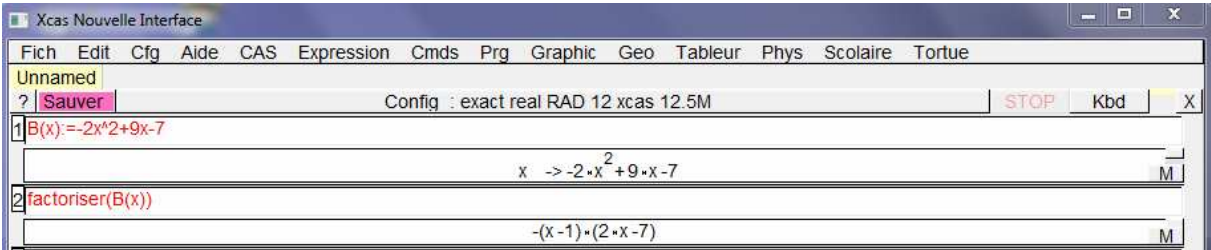
FICHE PROFESSEUR

1^{ère} partie : Courbe représentative de B sur sinéquanon pour la lecture graphique :



2^{ème} partie : Preuve

1) Pour résoudre $B(x) > 0$, l'élève a besoin de la forme factorisée de $B(x)$, on la détermine avec Xcas.

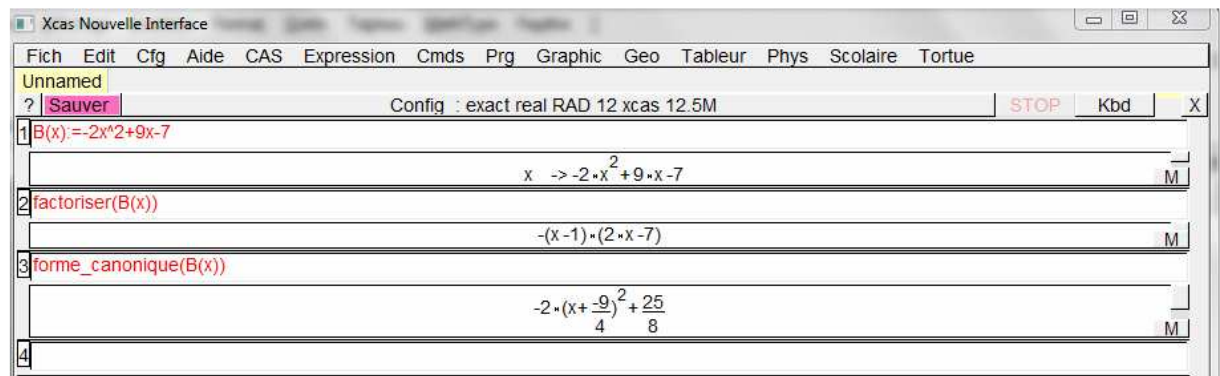


On détermine alors le signe de $B(x)$ grâce à un tableau de signes.

x	$-\infty$	1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$-(x-1) = -x+1$	+	0	-	-
$2x-7$	-	-	0	+
$-(x-1)(2x-7)$	-	0	+	-

La fabrique réalise un bénéfice lorsqu'elle produit (et vend) entre 100 et 350 jouets.

- 2) Pour résoudre $B(x) = 2$, l'élève a besoin de la forme canonique de $B(x)$, on la détermine avec Xcas.



On résout alors :

$$\begin{aligned}
 B(x) &= 2 \\
 \Leftrightarrow -2\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} &= 2 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 &= \frac{9}{16} \\
 \Leftrightarrow x - \frac{9}{4} &= \frac{3}{4} \text{ ou } x - \frac{9}{4} = -\frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow x &= 3 \text{ ou } x = 1,5
 \end{aligned}$$

La fabrique réalise un bénéfice de 2000 € lorsqu'elle produit 150 jouets ou 300 jouets.

3) $B(x) = -2x^2 + 9x - 7$: B est une fonction polynôme du second degré avec $a = -2 < 0$ donc B est croissante puis décroissante. Le maximum de B est donc l'ordonnée du sommet de la parabole la représentant.

Pour déterminer l'abscisse du sommet de cette parabole, on résout, par exemple,

l'équation $B(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)(2x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{2}$ puis on calcule la demi-

somme de ces 2 nombres car on sait qu'une parabole admet pour axe de symétrie la droite verticale passant par son sommet.

$$\left(1 + \frac{7}{2}\right) \div 2 = \frac{9}{4} \text{ et } B\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{25}{8}.$$

Pour réaliser un bénéfice maximal, la fabrique doit produire (et vendre) $\frac{9}{4} \times 100 = 225$

jouets. Ce bénéfice maximal est de $\frac{25}{8} \times 1000 = 3125$ €.

On peut ensuite vérifier ces réponses grâce à Xcas :

Xcas Nouvelle Interface

Fich Edit Cfg Aide CAS Expression Cmds Prg Graphic Geo Tableur Phys Scolaire Tortue

Unnamed Unnamed

? Sauver Config : exact real RAD 12 xcas 12.812M

- 1 $B(x) := -2x^2 + 9x - 7$

$$x \rightarrow -2 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 7$$
- 2 $\text{factoriser}(B(x))$

$$-(x - 1) \cdot (2 \cdot x - 7)$$
- 3 $\text{forme_canonique}(B(x))$

$$-2 \cdot \left(x + \frac{-9}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$
- 4 $\text{resoudre}(B(x) > 0)$

$$\left[(x > 1) \ \&\& \ (x < \frac{7}{2}) \right]$$
- 5 $\text{resoudre}(B(x) = 2)$

$$\left[\frac{3}{2}, 3 \right]$$
- 6 $\text{Max}(B(x))$

$$\frac{9}{4}$$
- 7 $B(9/4)$

$$\frac{25}{8}$$
- 8