Sujet 7–Suites associées– Épreuve pratique 2008

Énoncé

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases}$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = b_n - a_n.$$

a. Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

c. Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validéee par lexaminateur.

Appeler l'examinateur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4. a. Démontrer la conjecture de la question 3 b.

b. Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

c. Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n).

Production demandée

- Construction de la feuille de calcul complète ;
- Formulation orale des conjectures ;
- Réponses argumentées à la question 4.

∽ Sujet 13 –Etude de Flux de populations – Épreuve pratique 2008 ∽

Enoncé

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.
Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

- La population totale des trois zones **reste constante**.
- Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone B et 1% de la population de la zone C.
- Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.
- Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.
On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année $2008+n$.
On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

$\boxed{1.}$ On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.

a. Représenter graphiquement, à l'aide du tableur ou d'une calculatrice, les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

b. Conjecturer le sens de variation des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

Appeler l'examinateur pour vérification des résultats obtenus et des conjectures.

$\boxed{2.}$ Pour chaque année $2008+n$, soit d_n la différence de population entre les zones A et B. Conjecturer la nature de la suite (d_n).

Appeler l'examinateur pour une vérification et lui indiquer les méthodes envisagées pour les démonstrations qui suivent.

$\boxed{3.}$ On se propose de calculer les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

a. Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n.

b. En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.

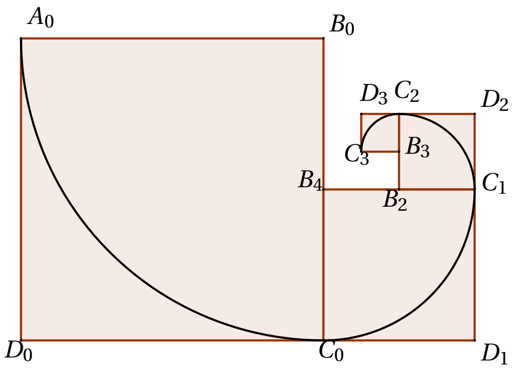
c. Déterminer les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

Production demandée

- Une feuille de calcul donnant les valeurs de n et des termes des différentes suites.
- Un graphique représentant les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).
- Les réponses argumentées aux questions de la Partie 3.

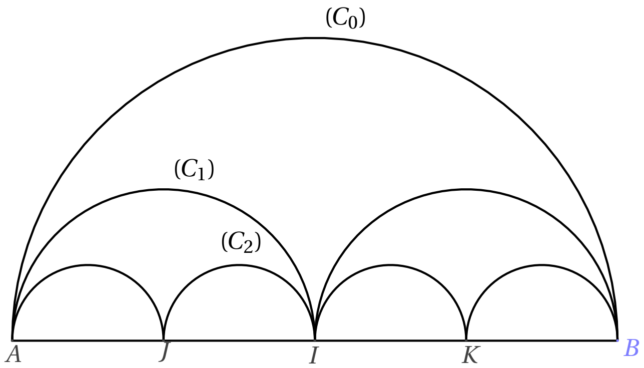
☆ EXERCICE 1

Soit $A_0B_0C_0D_0$ un carré de côté 16 cm.
À l'intérieur du carré on trace le quart de cercle de centre B_0 et de rayon B_0C_0.
On appelle B_1 le milieu du segment $[B_0C_0]$ et on trace la carré $C_0B_1C_1D_1$ extérieur au carré $A_0B_0C_0D_0$ et le quart de cercle de centre B_1 et de rayon B_1C_1.
L'itération du processus de construction donne les carrés : $C_1B_2C_2D_2, C_2B_3C_3D_3, \ldots$ et la spirale $A_0C_0C_1C_2C_3\ldots$



1. Faîtes un dessin.
2. Quelle est la longueur l_5 de la spirale obtenue avec 5 carré ?
3. On dessine n carrés. Quelle est la longueur de la spirale $A_0C_0C_1\ldots C_{n-1}$?

☆ EXERCICE 2



Le segment $[AB]$ mesure 8 cm ; les points I, J, K sont les milieux de $[AB], (AI], [IB]$.
$(C_0), (C_1), (C_2)$ sont les courbes représentées ci-dessus.
Construction : en utilisant un processus de construction analogue à celui qui permet de construire (C_1) à partir de (C_0), puis de (C_2) à partir de (C_1), dessiner les courbes (C_3) et (C_4).

Recherche de relations

1. Pour chacune des courbes $(C_0), (C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4), calculez :
   a. la longueur de la courbe
   b. l'aire de la portion de plan comprise entre le segment $[AB]$ et la courbe.
2. Soit n un nombre entier naturel non nul, (C_{n-1}) et (C_n) deux courbes consécutives du dessin (par exemple (C_3) et (C_4)), r_n le rayon des demi-cercles composant (C_n), l_n la longueur de (C_n) et a_n l'aire de la portion de plan comprise entre $[AB]$ et (C_n).
   a. Exprimez une relation entre r_n et r_{n-1}.
   b. Exprimez une relation entre les longueurs l_n et l_{n-1} de (C_n) et (C_{n-1}).
   c. Exprimez une relation entre a_n et a_{n-1}.