1. Le contexte

Considérons un entier naturel non nul n, un entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Considérons la répétition de n expériences identiques et indépendantes à deux issues (succès ou échec) représentée par un arbre pondéré.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ correpond au nombre de chemins réalisant k succès en n expériences.

➢ $\boxed{\text{Propriété d'initialisation : } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$.

En effet, il est évident qu'il n'y a qu'un seul chemin avec 0 succès (chemin avec uniquement des échecs), et un seul chemin avec n succès (chemin avec uniquement des succès).

➢ $\boxed{\text{Propriété de symétrie : } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.}$

En effet, par symétrie succès/échec, $\binom{n}{k}$ correpond aussi au nombre de chemins réalisant k échecs en n expériences. De plus, "k échecs en n expériences" est équivalent à "$n-k$ succès en n expériences", ce qui donne le résultat.

➢ $\boxed{\text{Propriété de récurrence : } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$

On peut commencer par observer ce phénomène pour $n = 2$ et $k = 0, 1$ sur l'exemple précédent de 3 lancers d'une pièce.

Plus généralement, $\binom{n+1}{k+1}$ correspond au nombre de chemins réalisant $k+1$ succès en $n+1$ expériences. Or ces chemins sont de deux types :

- il y a ceux pour lesquels il y a succès lors de la $(n+1)^{ème}$ expérience, et ils réalisent donc k succès lors des n premières expériences, soit $\binom{n}{k}$ chemins possibles ;

- il y a ceux pour lesquels il y a échec lors de la $(n+1)^{ème}$ expérience, et ils réalisent donc $k+1$ succès lors des n premières expériences, soit $\binom{n}{k+1}$ chemins possibles.

➢ $\boxed{\text{Triangle de Pascal.}}$

Les propriétés 1 et 3 permettent de construire ce triangle.

Utilisation du tableur Excel : construire le triangle de Pascal pour $n = 20$.

2. Énoncés

☆ Exercice 1

$\boxed{\text{Echantillonnage avec loi binomiale}}$

Les services obstétriques d'une ville de province annoncent que sur 200 naissances, on a pu comptabiliser 116 garçons. On souhaite savoir à partir de quelles fréquences on pourra mettre en doute, au seuil de 5%, cette affirmation.

1. On fait l'hypothèse que l'on a bien 58% de chances d'accueillir un garçon. Par ailleurs, on suppose que la population de la ville est suffisamment grande pour considérer que les 200 naissances sont indépendantes les unes des autres. Montrer que dans ces conditions, la variable aléatoire X, correspondant au nombre de garçons, suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,58$.

2. A l'aide d'un tableur, établir la loi de probabilité de X ainsi que la table des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$.

   a. Déterminer les nombres a et b tels que :
   - a est le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
   - b est le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,975$.

   b. Comparer l'intervalle de fluctuation à 95% $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n} \right]$ obtenu grâce à la loi binomiale avec l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$. Essayer d'expliquer.

3. En réalité, on a comptabilisé, sur 200 naissances, 126 garçons. Peut-on accepter, au seuil de 5%, notre hypothèse de départ ?

utilisation sur tableur de LOI.BINOMIALE(k ;n ;p) et pour le cumul LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;VRAI) ou CRITERE.LOI.BINOMIALE(n ;p ;alpha)

➢ Tableur.

➢ Programme Python.

```
from random import *
N=input('nombre echantillons')
# liste des compteurs (total de garçons pour X=k)
L=[]
for j in range(0,201):
L.append(0.)
for n in range(1,N+1):
# on simule 200 naissances et on compte les garçons
g=0.
for i in range(1,201):
        sexe=randint(1,100)
        if sexe<=58:
                g=g+1
# on série les nombres de garçons
for j in range(0,201):
        if g==j:
                L[j]=L[j]+1.
# fréquences :
K=[]
# liste des fréquences
for j in range(0,201):
        K.append(L[j]/N)
# cumul des fréquences
C=[]
C.append(K[0])
for j in range(1,201):
        C.append(K[j]+C[j-1])
for j in range(0,201):
        print'frequence X=',j,' : ',K[j],' cumul : ',C[j]
# détermination de a et b
a=0.
b=0.
for j in range(0,201):
        if C[j]<=0.025:
                a=a+1.
        if C[j]<=0.975:
                b=b+1.
print a,b
print 'intervalle à 5\% : [',a/200,' ; ',b/200,']'
```

✮ EXERCICE 2

Extrait d'un document de l'inspection générale

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 5 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est $p = 0,52$. Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

2.

On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

	A	B
1	k	P(X≤k
2	1	1,45504E-30
3	2	7,87682E-29
4	...	
5	40	0,010600796
6	41	0,017728033
7	42	0,028574444
8	43	0,044423657
9	...	
10	60	0,956056455
11	61	0,971888103
12	62	0,982676605
13	63	0,989726234
14	...	
15	100	1
16		

a. Déterminer a et b tels que :

- a est plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$;
- b est plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

b. Comparer l'intervalle de fluctuation à 95 %, $\left[\dfrac{a}{n}; \dfrac{b}{n}\right]$ ainsi obtenu grâce à la loi binomiale, avec l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

3. Énoncer la règle décision permettant de rejeter ou non l'hypothèse $p = 0,52$, selon la valeur de la fréquence f des électeurs favorables à Monsieur Z obtenue sur l'échantillon.

4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 5%, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

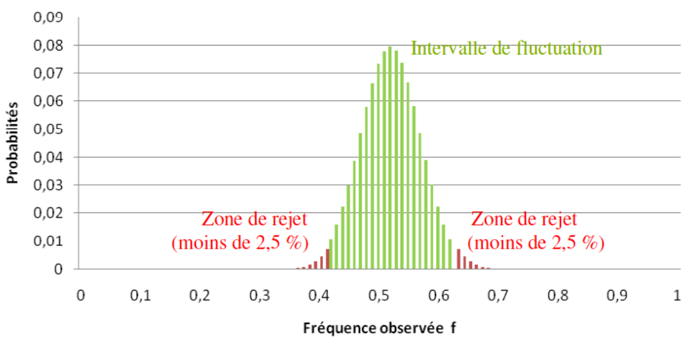
3. Éléments de correction

☆ Correction de l'exercice 2

On lit $a = 42, b = 62$; les intervalles sont identiques.

Si f appartient à l'intervalle $[0,42; 0,62]$, l'hypothèse $p = 0,52$ est acceptable, sinon, l'hypothèse $p = 0,52$ est rejetée, au seuil de 5 %. On considère que l'affirmation de Monsieur Z est exacte.

Remarque : la recherche de l'intervalle de fluctuation peut-être illustrée par le diagramme en bâton de la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.



Remarque : la recherche de l'intervalle de fluctuation peut-être illustrée par le diagramme en bâton de la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.