✯ EXERCICE 1

Simulation

On lance un dé non pipé à 6 faces quatre fois de suite et l'on note les numéros obtenus. Cette opération est nommée un tirage.
Les deux premiers numéros représentent les coordonnées $(x;y)$ d'un vecteur $\vec{u}$, les deux derniers les coordonnées $(x';y')$ d'un vecteur $\vec{v}$.
Réaliser une feuille de calcul simulant 1 000 tirages et les valeurs correspondantes de $xy' - yx'$.
Quelle est la fréquence d'apparition de la valeur 0 ?
Renouveler 10 simulations successives et comparer les résultats obtenus.

1. Épreuve expérimentale

Sujet 66–2008 – Suite aléatoire

Enoncé

On considère une suite (S_n) définie par le lancer d'une pièce équilibrée de la façon suivante :

$S_0 = 0$ et $\begin{cases} S_{n+1} = S_n + 1 \text{si on obtient PILE} \\ S_{n+1} = S_n - 1 \text{si on obtient FACE} \end{cases}$

On note A_n l'événement « obtenir $S_n = 0$ ».
On s'intéresse à la probabilité de réaliser l'événement A_n pour un entier n non nul donné.

Étude expérimentale

1. En utilisant un tableur, effectuer une simulation donnant les 11 premiers termes de 1 000 suites définies de la même façon que (S_n).
   Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles l'événement A_n est impossible ? Justifier votre réponse.

   Appeler l'examinateur pour présenter votre simulation et votre justification.

2. a. Donner les fréquences d'apparition de l'événement A_n pour n variant de 1 à 10.
   b. Faire d'autres simulations de même taille pour compléter le tableau suivant :

Fréquences d'apparition de A_n										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Simulation n^1										
Simulation n^2										
Simulation n^3										
Simulation n^4										
Simulation n^5										

   Appeler l'examinateur pour une vérification.

Étude mathématique

3. Déterminer les probabilités de réaliser les événements A_2, A_4 et A_6.

   Appeler l'examinateur pour une vérification.

4. Donner une expression de $p(A_n)$ en fonction de la parité de n.

Production demandée

– Donner une expression de $p(A_n)$ en fonction de la parité de n.

– Calcul de $P(A_2)$, de $p(A_4)$ et de $p(A_6)$;
– Justification de la méthode de calcul de $p(A_n)$.

Sujet 3–Etude d'un jeu

Énoncé

On lance trois dés bien équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
Alice et Bob calculent la somme des trois nombres obtenus.
Si la somme obtenue est égale à 9, Alice gagne.
Si la somme obtenue est égale à 10, Bob gagne.
Dans tous les autres cas, la partie est annulée. Le but de l'exercice est de déterminer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner.

Étude expérimentale

1. Sur un tableur, réaliser une simulation de cette expérience aléatoire.

Appeler l'examinateur pour valider cette simulation.

2. Sur un tableur, réaliser une simulation sur un échantillon de taille 1000 de cette expérience aléatoire et déterminer, pour cette simulation, les fréquences de réussite respectives d'Alice et de Bob.

Appeler l'examinateur pour valider la feuille de calcul construite.

3. Est-il possible de conjecturer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

Appeler l'examinateur pour lui fournir cette réponse et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Étude mathématique

On souhaite maintenant calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.

4. Répondre aux deux questions suivantes (dans n'importe quel ordre) :
   – Calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.
   – Qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

Production demandée

– Bilan de la simulation de la question 2 ;
– Réponse orale à la question 3 ;
– Réponses argumentées à la question 4.

Sujet 10–Marche aléatoire

Énoncé

Un pion est placé sur la case de départ :

				Départ				

Le lancer d'une pièce bien équilibrée détermine le déplacement du pion.
• PILE, le pion se déplace vers la droite
• FACE, le pion se déplace vers la gauche.
Un trajet est une succession de 4 déplacements. On s'intéresse à l'événement A : « le pion est revenu à la case départ après 4 déplacements ».
A chaque lancer, on associe le réel $+1$ si le résultat est PILE et -1 si le résultat est FACE.

Étude expérimentale

1. Simuler à l'aide du tableur de 200 à 2000 trajets du pion et estimer la fréquence de l'événement A. Compléter le tableau suivant :

Nombre d'essais	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
Fréquence de A										

Appeler l'examinateur pour une vérifier le tableau obtenu.

Étude mathématique

2. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des quatre réels.

   a. En précisant la méthode choisie, calculer les valeurs possibles de X et le nombre de trajets possibles.

   Appeler l'examinateur pour contrôler la réponse et lui indiquer la démarche prévue à la question suivante.

   b. Calculer la probabilité de l'événement A à l'aide d'un schéma de Bernoulli et comparer avec l'estimation obtenue.

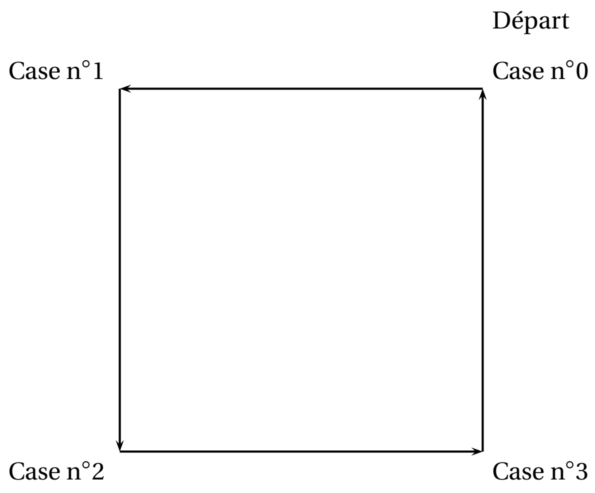
Production demandée

- Réaliser une simulation en utilisant les fonctions appropriées.
- Donner une réponse argumentée à la question 2.

Marche aléatoire

Énoncé

Un pion est placé sur la case numérotée 0 'un parcours formé de quatre cases organisées en carré.



Le lancer d'une pièce bien équilibrée détermine le déplacement du pion.

- PILE : le pion de déplace d'une case dans le sens direct.
- FACE : le pion de déplace d'une case dans le sens indirect.

Autrement dit, à chaque lancer on associe le nombre +1 si le résultat est PILE et -1 si le résultat est FACE.
Pour n lancers considérés comme indépendants,on désigne par D_n l'événement « le pion est sur la case de départ ».

Étude expérimentale

$\boxed{1.}$ a. Simuler, à l'aide du tableur, 1000 expériences composées de 20 lancers successifs.

b. Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles l'événement D_n est impossible ? Justifier votre réponse.

Appeler l'examinateur pour présenter la simulation et la justification.

$\boxed{2.}$ a. Donner les fréquences d'apparition de l'événement D_n pour n variant de 0 à 20.

b. Que peut-on observer ? Essayer de formuler une conjecture.

c. Effectuer d'autre simulations de même taille pour éprouver la conjecture.

Appeler l'examinateur pour présenter la conjecture.

Étude mathématique

$\boxed{1.}$ Déterminer les probabilités des événements D_2, D_4, D_6 et D_8.

$\boxed{2.}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux nombres entiers P_n et I_n par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k+1}.$$

Calculer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$ en fonction de n ; en déduire la valeur de P_n et celle de I_n.

Appeler l'examinateur pour une vérification.

$\boxed{3.}$ Donner une expression de $p(D_n)$, probabilité de l'événement D_n, en fonction de n. La conjecture est-elle vérifiée ?