Idée « retrouvée » dans le Hyperbole 1ère S de 2005 et ensemble retravaillé à partir d'un thème étudié en Seconde en option sciences (où on en était resté au stade de la conjecture bien sûr…)

Le gâteau de cire construit par les abeilles pour y déposer leur miel est formé de deux couches d'alvéoles opposées par leur fond. Une alvéole ressemble à un prisme droit à base hexagonale régulière (l'ouverture), mais le fond est un assemblage de trois losanges (rhombes) identiques qui appartiennent chacune à deux alvéoles opposées.
Ce n'est en fait qu'au XVIIIème siècle que les losanges de raccordement des cellules sont étudiés de façon précise :

- Maraldi : astronome à l'observatoire de Paris en 1712 détermine expérimentalement l'angle de $109°28'$ de ces losanges.
- König, en 1739, traite la question par calcul et trouve (avec une erreur)$109°\ 26'$
- Mac Laurin :en 1743 corrige l'erreur de König et confirme le résultat de Maraldi.

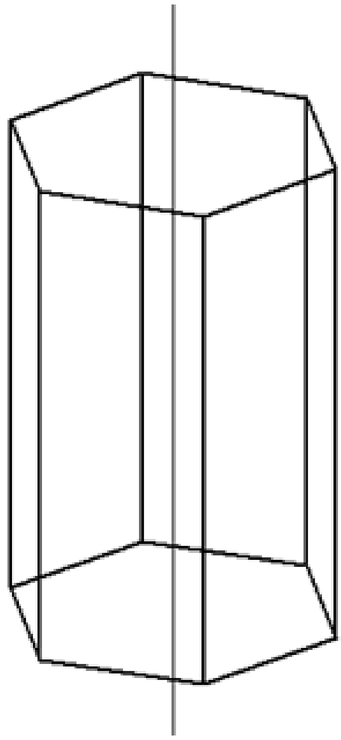
FIGURE 1 – La cire est un produit perdu pour l'abeille. Il est remarquable de constater que les abeilles construisent le fond de façon à n'utiliser qu'un minimum de cire

Pour l'étude du raccordement des cellules :
• en Seconde, par le biais de la calculatrice et d'un logiciel de géométrie dynamique, on peut étudier le problème d'optimisation sous-jacent.
• en Première, on peut faire de la même façon cette conjecture (voir les fichiers joints), mais on peut aussi poursuivre l'étude en exprimant la fonction donnant l'aire latérale de la cellule, puis, celle-ci étant trop délicate à dériver en Première, on peut envisager l'utilisation d'un logiciel de calcul formel pour exprimer de façon exacte la dérivée et pouvoir ainsi faire le lien avec le problème d'optimisation (ici minimisation de l'aire)…
Un plan d'étude possible…

Problème de raccordement des cellules

On considère au départ un prisme droit ayant pour base un hexagone régulier d'arête a (voir la figure donnée) et on cherche à construire les losanges de raccordement des cellules.

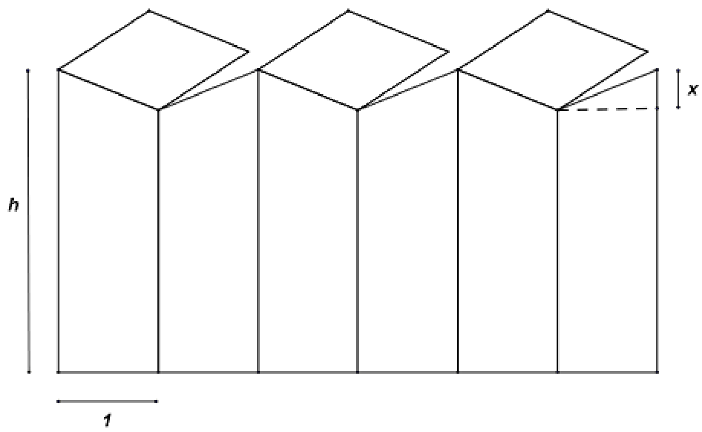
- Partager la face supérieure en trois losanges de côté a.
- Choisir un de ces losanges. On le notera $OABC$, avec O sur l'axe du prisme.
- Imaginer qu'on fasse pivoter ce losange autour de la diagonale (AC), de sorte que les sommets S et S' du nouveau losange $SAS'C$ restent respectivement sur l'axe du prisme et sur l'arête passant par B. Placer un point S sur l'axe du prisme et construire le losange $SAS'C$ correspondant.
- Construire alors les deux autres losanges du fond de la cellule.



Volume et aire des cellules

Le but du travail suivant est d'étudier le volume et l'aire de la cellule obtenue suivant les valeurs de OS puis d'en tirer les conséquences quant au choix des abeilles…

1. Pour le volume : Justifier que le volume de la cellule obtenue ne dépend pas de la position de S sur l'axe du prisme (voir le fichier joint « volume invariant ») pour s'en convaincre.
2. Pour l'aire : a.
   a. Voir le fichier joint (« cellule aire-volume ») pour conjecturer la position de S donnant une aire latérale minimale.
   b. Calcul de l'aire latérale en fonction de $x = OS$.



Montrer que $\mathscr{A}(x) = 18 - 3x + \dfrac{3}{2}\sqrt{12x^2+3}$.

Indication : on pourra s'aider en représentant les losanges OABC et SAS'C obtenus précédemment en vue de face.

   c. Calcul de $\mathscr{A}'(x)$: utiliser un logiciel de calcul formel…

(On doit obtenir $\mathscr{A}'(x) = -3 + \dfrac{18x}{\sqrt{12x^2+3}}$).

Rechercher le signe de $\mathscr{A}'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de signes de $\mathscr{A}'(x)$ sur $I = [0;2]$.

Quel lien semble apparaitre avec la conjecture trouvée précédemment sur l'aire minimale de la cellule, et aussi sur les variations de l'aire de la cellule ?