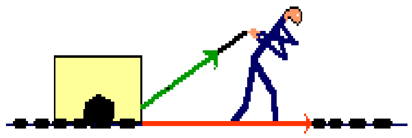
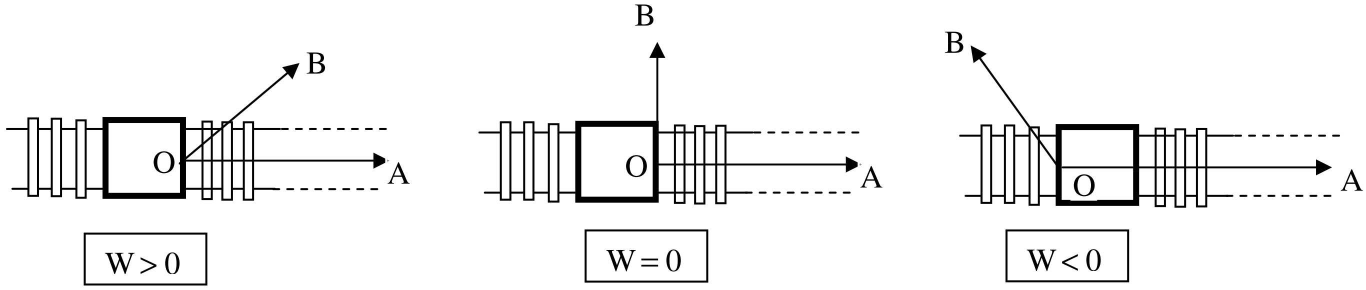
1 STI Activité : introduction au produit scalaire

Travail d'une force en physique

	Le **travail d'une force** est l'énergie fournie par cette **force** lorsque son point d'application se déplace (l'objet subissant la **force** se déplace) Le **travail d'une force** est responsable de la variation de l'énergie cinétique du système qui subit cette **force**. Si par exemple on pousse une voiture, le **travail** de la poussée est l'énergie produite par cette poussée. Cette notion avec ce nom fut introduite par Gaspard-Gustave Coriolis. Le **travail** est exprimé en joules (**J**), et est souvent noté *W*, initiale du mot anglais *Work* qui signifie ***travail***.

Modélisation mathématique :



La force $\vec{F}$ est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OB}$ et le déplacement par le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Le travail d'une force $\vec{F} = \overrightarrow{OB}$ durant le déplacement de O vers A est le nombre $W = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$:

- positif lorsque la force favorise le déplacement de O vers A
- négatif lorsque la force s'oppose au déplacement de O vers A
- nul lorsque la force ne contribue pas au déplacement de O vers A

On considère le triangle OAB :

1. Etude du cas où la force ne contribue pas au déplacement de O vers A ($W = 0$)

Le triangle OAB est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $OA^2 + OB^2 = AB^2$, soit : $OA^2 + OB^2 - AB^2 = 0 = W$

On pose $d = OA^2 + OB^2 - AB^2$.

Le but de cette activité est de comparer la quantité d à W lorsque le triangle n'est pas rectangle en A.

2. Expérimentation avec GeoGebra

a) Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ construire un triangle OAB à l'aide de l'icône , A étant un point de l'axe des abscisses, O l'origine du repère et B un point libre du plan ainsi que l'angle $\widehat{AOB}$.

Vérifier que dans la fenêtre Algèbre, que les trois réels a, b, et c correspondent aux longueurs OB, OA et AB sinon les renommer et que le réel α correspond à l'angle $\widehat{AOB}$

b) Créer et faire et faire apparaître les réels $w = a \times b \times \cos(\alpha)$ et d

Aide :

- Ecrire dans la barre de saisie $w = a \times b \times \cos(\alpha)$
- Ecrire dans la barre de saisie $d = a^2 + b^2 - c^2$

c) Faire varier la position du point B (cliquer droit sur le point B) et comparer les valeurs de w et de d.

Quelle relation peut-on conjecturer entre w et d ?

c) Autres façons de calculer w.

- Construire le projeté orthogonal H du point B sur la droite (OA)

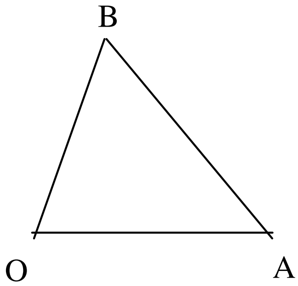
Aide : à l'aide de l'icône , tracer la hauteur (que l'on renommera hauteur) issue de B du triangle OAB et ensuite , à l'aide de , placer le point H.

Créer et faire apparaître les segments $[OA]$ et $[OH]$ Créer et faire apparaître le nombre $g = OA \times OH$

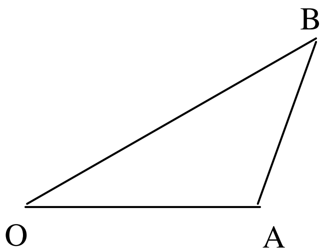
- Créer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (appelés u et v dans la fenêtre Algebre)et faire apparaître le nombre $p = x(u)*x(v)+y(u)*y(v)$.
- Faire varier la position du point B (cliquer droit sur le point B) et comparer les valeurs de w et de d. Quelle relation peut-on conjecturer entre w ,g , d et p?

3. Démonstration

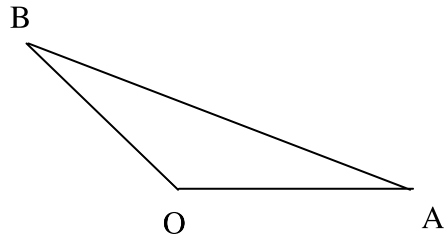
situation 1



situation 2



situation 3



a) Pour chacune des figures ci –dessus, placer le point H, projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

b) Justifier les égalités suivantes : $AB^2 = HB^2 + HA^2$ et $OB^2 = HO^2 + HB^2$

En déduire que $d = OA^2 + HO^2 - HA^2 = OA^2 + (HO - HA)(HO + HA)$ (1)

c) Situation 1 : O, H et A sont alignés dans cet ordre donc $HA = OA - OH$

- Déduire de (1) que $d = 2OA \times OH$
- Démontrer alors que $d = 2OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}$

d) Situation 2 : O, A et H sont alignés dans cet ordre donc HA =

- Déduire de (1) que $d = 2OA \times OH$
- Démontrer alors que $d = 2OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}$

e) Situation 3 : Par une démarche analogue, démontrer que :

$d = -2OA \times OH$ et que $d = 2OA \times OB \times \cos\widehat{AOB}$

Aide : on rappelle que $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

f) On note $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ les coordonnées de A et Bdans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$

- Exprimer en fonction de ces coordonnées le nombre d. (On rappelle que $d = OA^2 + OB^2 - AB^2$
- déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Puis calculer $x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}}$
- Que constate-t-on ?

Conclusion : Le nombre $\frac{d}{2}$ qui est indépendant des cas de figures est appelé **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On le note $\vec{u}.\vec{v}$

Ce nombre peut se calculer de plusieurs façons :

- Avec les normes et un angle
- Avec la projection orthogonale
- Avec les coordonnées dans un repère orthonormal.

Le travail d'une force $\vec{F} = \overrightarrow{OB}$ durant le déplacement de O vers A est le nombre $W = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$