Activité : créer de nouveaux nombres pour résoudre une équation.

(d'après Maths première STI, A. Excellent…, Hachette éducation)

1. Quand une méthode de résolution ne donne pas tous les résultats espérés…
   On a vu dans le chapitre « Polynômes » que, pour résoudre une équation du troisième degré, il suffit d'en déterminer une solution (cela permet de factoriser et de finir la résolution). C'est un italien Cardan, qui en 1545, établit une solution pour des équations du troisième degré qui s'écrivent $x^3 = px + q$ et qui démontre que si le nombre $d = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ est positif ou nul, l'équation admet pour solution le nombre $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{d}}$.
   L'écriture $\sqrt[3]{a}$ est la racine cubique de a, c'est-à-dire le nombre dont le cube est a.
   Par exemple $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$.

   a) En utilisant la méthode de Cardan, déterminer une solution de l'équation $x^2 = 9x + 28$. Vérifier que cette valeur est bien une solution.

   b) Cardan essaye sa méthode sur l'équation (E) : $x^3 = 15x + 4$. Calculer pour cette équation, le nombre $d = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Quel est son signe ?
   Peut-on utiliser la méthode de Cardan ?
   Vérifier que l'équation (E) admet cependant le nombre 4 pour solution.

2. En 1572, un autre italien, Bombelli, décide d'utiliser la méthode de Cardan, en écrivat « *une racine carrée [qui]a[…] un nom et une opération différents des autres* ».
   Autrement dit, Bombelli s'autorise l'écriture $\sqrt{-121}$, sans chercher à donner un sens à ce nombre mais pour l'utiliser comme un outil de calcul.

   a) Vérifier que si l'on accepte d'écrire le « nombre impossible » $\sqrt{-121}$, la solution de l'équation (E) s'écrit $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$.

   Avec ce « nombre impossible », Bombelli poursuit son calcul et vérifie que la méthode de Cardan reste valable puisqu'elle permet de trouver une solution réelle de l'équation.

   b) Vérifier, à partir du développement de $(a+b)^3$ et de $(a-b)^3$ que $(2+\sqrt{-1})^3 =$ $2+11\sqrt{-1}$ et que $(2-\sqrt{-1})^3 =$ $2-11\sqrt{-1}$.
   En déduire que $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 4$.