1. Le contexte

La loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$) correspond au modèle suivant : On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p et celle d'échec $q = 1 - p$.

On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu'au premier succès. On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p .

➤ Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

➤ $E(X) = \frac{1}{p}$ et $Var(X) = \frac{q}{p^2}$.

Durée de vie

La loi géométrique est une version discrétisée de la loi exponentielle.

http://www.statelem.com/loi_geometrique.php

★ Exemple 1 :

Si on nomme p la probabilité de désintégration d'une particule radioactive, la loi géométrique est le premier modèle discret de la « mort » d'une particule radioactive. La durée de vie de la particule radioactive (V), suit la loi de probabilité suivante :

$$P(V > k) = q^k = e^{k \ln(q)} = e^{k \ln(1-p)}.$$

Pour p « petit », on a $P(V > k) \sim e^{-kp}$

où on retrouve la distribution de la loi exponentielle.

Loi géométrique tronquée : on est dans le cadre précédent, mais on effectue n épreuves successives, n fixé. Si le premier succès n'arrive pas à temps, on convient que $X = 0$.

Énoncés

★ EXERCICE 1

On lance un dé à six faces bien équilibré.

Une partie se déroule de la manière suivante : on lance le dé et on observe le résultat obtenu. Si la face est 6, la partie s'arrête. Sinon on relance le dé autant de fois que nécessaire pour obtenir un 6, mais on ne peut pas relancer le dé plus de 15 fois. On considère que les lancers sont indépendants.

On désigne par k la variable aléatoire qui indique le numéro du lancer où l'on obtient le 6 et où la partie s'arrête.

1. Simuler une partie à l'aide du tableur.
2. Sur un échantillon de 2000 parties, quelle est la fréquence de l'événement $k = 5$?
3. Déterminer la probabilité pour que $k = 5$. Comparer les résultats.
4. Calculer $P(k = 10), P(k = 15)$.
5. Quelle est la probabilité de perdre la partie ?
6. Calculer l'espérance et la variance de k .

> Programme Python

> Calculatrice

Le but est de simuler N fois l'expérience consistant à lancer au maximum P fois un dé en s'arrêtant dès qu'on a 6.

On comptabilise dans la liste $L1$ le nombre de fois où le 6 est apparu au premier lancer, au 2ème lancer, ... au p -ième lancer, et en dernier on met le nombre de fois où on n'a pas eu le 6 lors des P lancers.

Dans la liste $L2$ figurent les fréquences correspondantes et dans $L3$ on peut ajouter les rangs $1, 2, 3, \dots, P + 1$ dans l'optique de construire un graphe avec $L3$ pour les X et $L2$ pour les Y .

Programme avec Python :

```
# p lancers de dé – loi geometrique tronquée
from random import *
e=input('nombre d echantillons ')
k=input('k=?')
f=0
p=input('nombre de lancers ')
for j in range(1,e+1):
# une partie
# on arrête dès que le six sort. i=numero du lancer final
    i=1
    while i<p+1 and randint(1,6)<>6:
        i=i+1
# résultats
    if i==k:
        f=f+1.
# fréquence de k=
print(f/e)
```

Programme avec TI :

```
:Prompt N
:Prompt P
:EffListe L1,L2,L3
:P+1 → dim(L1)
:P+1 → dim(L2)
:P+1 → dim(L3)
:For(K,1,N)
:0 → I
:0 → D
:While D ≠ 6 et I ≤ P
:I+1 → I
:entAléat(1,6) → D
:End
:If D=6
:Then
:L1(I)+1 → L1(I)
:Else
:L1(P+1)+1 → L1(P+1)
:End
:End
:For(R,1,P)
:R → L3(R)
:End
:L1/N → L2
:Disp L1
:Disp L2
:Pause
:AffGraph
:ZoomStat
```