Convexité : Application aux bénéfices total, moyen et marginal
(Terminale ES-L)

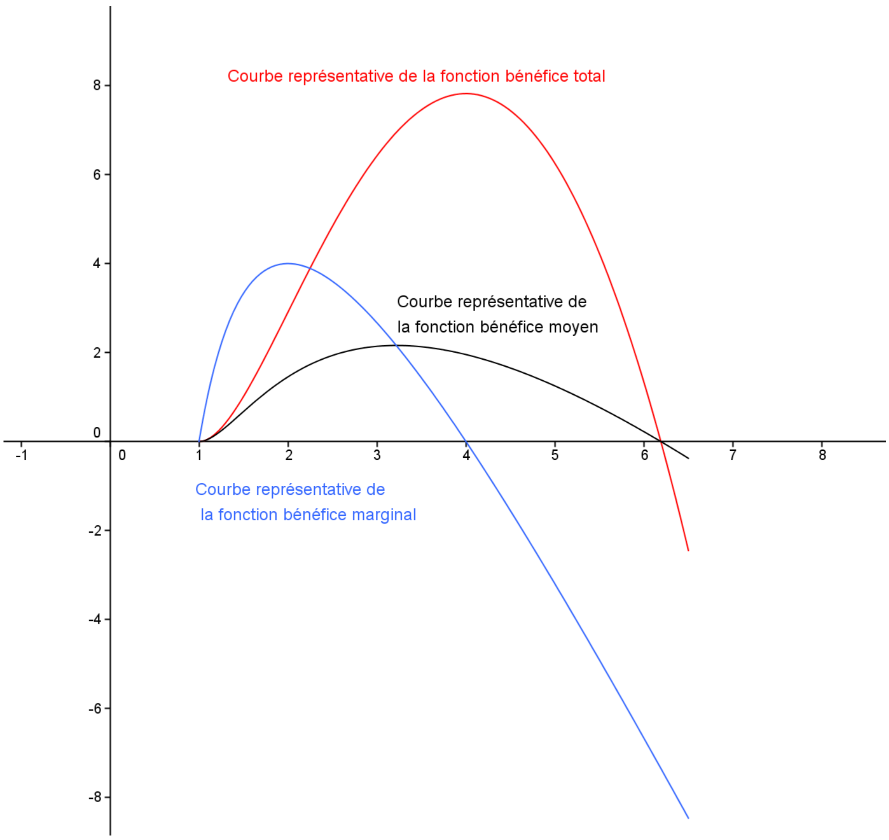
Une entreprise fabrique par jour entre 100 et 650 pièces. On suppose que le bénéfice total exprimé en milliers d'euros en fonction de la quantité q de pièces fabriquées est donné par :

$$B(q) = -2q^2 + 20q - 18 - 16\ln q$$

avec q exprimé en centaines.

Le bénéfice moyen est défini sur $[1;6,5]$ par $B_M(q) = \dfrac{B(q)}{q}$ et on considère que le bénéfice marginal est défini sur $[1;6,5]$ par $B_m(q) = B'(q)$.

Les courbes représentatives des fonctions bénéfice total, bénéfice moyen et bénéfice marginal sont représentées ci-dessous dans un repère orthogonal.



1) Justifier que les fonctions B_M et B_m sont définies sur $[1;6,5]$ par :

$$B_M(q) = -2q + 20 - \frac{18}{q} - 16\frac{\ln q}{q} \quad \text{et} \quad B_m(q) = \frac{-4q^2 + 20q - 16}{q}$$

2) Etudier la convexité de la fonction bénéfice total B sur l'intervalle $[1;6,5]$.

3) Que peut-on dire du point d'abscisse 2 de la courbe C_B de la fonction B ?

   Que peut-on en déduire du point de vue de la tangente à C_B en ce point ?

4) D' après le graphique, que vaut $B_m(2)$?

   Que semble représenter cette valeur pour le bénéfice marginal ?

5) Montrer, en utilisant ce qui précède, que l'entreprise réalise son bénéfice marginal maximal lorsqu'elle produit 200 pièces par jour et déterminer la valeur de celui-ci.

6) Déterminer graphiquement les variations de la fonction B_M sur $[1;6,5]$.

Pour déterminer, à l'unité près, la quantité q_0 de pièces à fabriquer pour laquelle le sens de variation change sur cet intervalle, on calculera $B_M'(q)$ et on résoudra l'équation $B_M'(q)=0$ grâce à un logiciel de calcul formel.

7) Que représente $B_M(q_0)$ pour le bénéfice moyen réalisé par cette entreprise ?

8) Calculer $B_M(q_0)$ et $B_m(q_0)$ et vérifier que ces deux valeurs sont égales à moins de 10 euros près.

Calculer alors très rapidement $B(q_0)$.

9) Soit q un réel strictement positif. Montrer, dans le cas général, que si $B_M'(q)=0$ alors $B_M(q)=B_m(q)$.

<u>Eléments de correction :</u>

2) $B''(q)=\dfrac{-4(q-2)(q+2)}{q^2}$ donc $B''(q)\geq 0$ pour $q\in[1;2]$ et $B''(q)\leq 0$ pour $q\in[2;6,5]$ donc B est convexe sur $[1;2]$ et concave sur $[2;6,5]$.

3) C'est un point d'inflexion.

La tangente à la courbe C_B en ce point traverse la courbe.

4) $B_m(2)=4$ milliers d'euros semble être le bénéfice marginal maximal de l'entreprise.

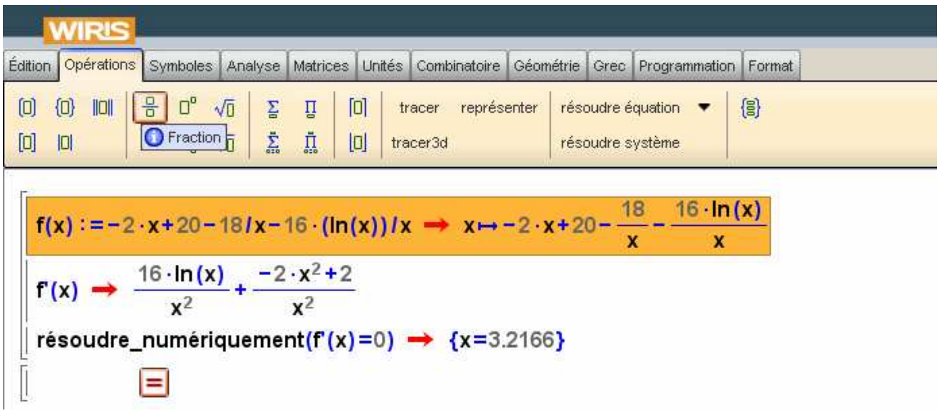
5)

q	1		2		6,5
$B_m'(q)=B''(q)$		+	0	-	

B_m est donc strictement croissante sur $[1;2]$ et strictement décroissante sur $[2;6,5]$.

Donc le maximum de B_m est atteint pour $q=2$, c'est-à-dire pour une production de 200 pièces par jour et il vaut $B_m(2)=4$ milliers d'euros.

6) D'après le graphique, B_M est strictement croissante sur $[1;q_0]$ et strictement décroissante sur $[q_0;6,5]$ avec $q_0\simeq 3,2$.



$q_0=322$ pièces

7) $B_M(q_0)$ est le bénéfice moyen maximal réalisé par l'entreprise.

8) $B_M(3,22) \simeq 2159$ euros et $B_m(3,22) \simeq 2151$ euros

On a alors $B_M(q_0) = B_m(q_0)$ donc $\dfrac{B(q_0)}{q_0} = B_m(q_0)$ donc

$B(q_0) = q_0 \times B_m(q_0) = 3,22 \times 2151 \simeq 6926$ euros.

9) Si $B_M\,'(q) = 0$ (q étant un réel strictement positif), alors $\dfrac{B'(q) \times q - B(q) \times 1}{q^2} = 0$

alors $B'(q) \times q = B(q)$ alors $B'(q) = \dfrac{B(q)}{q}$ soit $B_m(q) = B_M(q)$.