

Liste des démonstrations attendues :

1. Analyse

a. Suites

- Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
 - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang
 - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
 alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- Démontrer que si une suite est croissante et admet pour limite l alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l .
- Démontrer que la suite $(q)^n$, avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.

b. Fonction exponentielle

- Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur \mathbb{R} , égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.
- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

2. Géométrie

Produit scalaire

- Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + c = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls.
- Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

3. Probabilités et statistiques

a. Conditionnement, indépendance

- Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour \bar{A} et B .

b. Loi exponentielle

- On montre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$.
- Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

c. Loi normale centrée réduite

- Démontrer que pour $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif t_α tel que $P(-t_\alpha \leq X \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

d. Estimation

- Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$, alors, pour tout α dans $]0; 1[$ on a,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha, \text{ où } I_n \text{ désigne l'intervalle } \left[p - t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Liste des démonstrations qu'il est intéressant de traiter :

1. Analyse

a. Suites

- Démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

b. Intégration

- Démontrer (*principe de la démonstration*) que si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f (*dans le cas où f est positive et croissante*).
- Démontrer que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (*dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum*).

2. Géométrie

Géométrie vectorielle

- Démontrer (*présentation*) le théorème dit « du toit ».

3. Probabilités et statistiques

Estimation

- Démontrer que l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion à estimer avec une probabilité au moins égale à 0,95.