Table des matières

1. Convergence de matrice

Le programme de spécialité en S prévoit l'étude de suites de matrices ; on trouve de nombreux exercices dans les annales d'écoles de commerces. On limite le travail « à la main » à des matrices d'ordre 2, voire 3. au-delà **logiciel type XCAS ou calculatrice**.

✯ EXERCICE 1 (EMIAI) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (S) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 9b_n \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut écrire (S) sous la forme $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, où A est une matrice d'ordre 2 qu'on précisera.
2. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer le produit de matrices : $B = P\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}P^{-1}$.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B^n = P\begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix}P^{-1}$.
6. En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n lorsque $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$.

Différentes études sont prévues ; les processus dits stochastiques doivent être étudiés. On peut en particulier s'inpirer de sujets de TES utilisant des graphes pondérés.

✯ EXERCICE 2 (EXERCICES INSPECTION 2003) Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5 % des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20 % des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.

1. Dessiner un graphe décrivant cette situation.
2. Écrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
3. En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A.
   Calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004.
4. L'état (0,5 ; 0,5) est-il stable ? Justifier cette réponse.
5. Trouver vers quel état converge ce système.

✯ EXERCICE 3 (ANTILLES6GUYANE – SEPTEMBRE 200Ç) **Partie A**

Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.
Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.
On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.
Soit n est un entier entre 1 et 31. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n-ième jour, où :
a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;
b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition, notée M, associée à cette situation.
3. Déterminer l'état initial P_1.

4. a. Calculer P_2 (faire apparaître les calculs). Interpréter le résultat obtenu.

b. On suppose que $M^5 = \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \\ 0,317 & 0,683 \end{pmatrix}$ et $M^6 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,648 \\ 0,324 & 0,676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.

En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6e jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.

5. Soit P= $(x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable.
Déterminer x et y ; en donner une interprétation.

6. Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,15$.

Partie B

Pour n entier, $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = 0,55u_n + 0,15 \quad \text{et} \quad u_1 = 0,8.$$

1. On pose $U_n = u_n - \frac{1}{3}$.
Montrer que la suite (U_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.

2. Exprimer U_n puis u_n en fonction de n.

3. En déduire la limite de la suite (u_n). Quel résultat retrouve-t-on ?

2. Marches aléatoires

✯ EXERCICE 4 (PROBLÈME DE DÉPOUILEMENT) Au cours dun scrutin opposant deux candidats, A obtient 600 voix tandis que 400 voix se sont portées sur B.
On imagine que l'on procède au dépouillement ; on se pose la question suivante :
« Quelle est la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été toujours en avance (éventuellement à égalité) sur le candidat B. »
Il s'agit d'un problème de dénombrement de chemins.
Le candidat A a obtenu 200 voix de plus que le candidat B ; on va donc considérer les points de coordonnées (x, y), où x et y sont des entiers et $x \in [0;1000]$; y représente la différence entre le nombre de voix obtenu par A et par B.
☞ On va dénombrer tous les chemins qui mènent du point $O(0;0)$ au point de coordonnées $(1000;200)$ (nombre de cas possibles)
Tout d'abord, en quel sens sommes-nous dans le cadre d'une marche aléatoire ?
Le nombre de chemins cherchés est : $\binom{1000}{600}$. (en effet un chemin est une suite de 1 et -1, où il y a 600 fois le 1).
☞ Cas favorables : il s'agit de dénombrer tous les chemins qui vont du point O au point $C(1000, 200)$ sans passer sous l'axe des abscisses ou de chemins allant du point $D(0;1)$ au point $E(1000;201)$ sans toucher l'axe des abscisses.
Pour cela, on introduit le point $F(1000, -201)$; alors le nombre cherché est égal au nombre de chemins joignant C à E, moins le nombre de chemins allant de C à F, c'est à dire :

$$\binom{1000}{600} - \binom{1000}{399}.$$

(pour le deuxième nombre il suffit de remarquer que le nombre de 1 et -1 est 1000 et que leur différence est 202 : il doit donc y avoir 399 fois le 1 et 601 fois le -1).
Ainsi la probabilité p cherchée est le quotient des deux nombres précédents et $p \approx 0,3$.

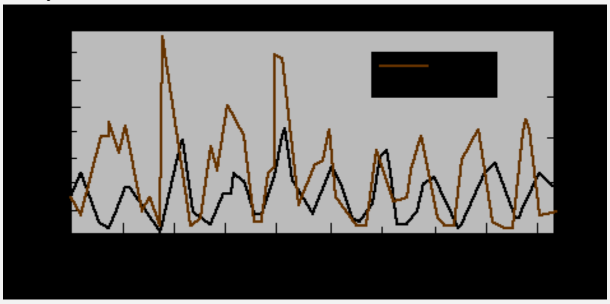
3. Urnes d'Ehrenfest

Le problème :
On considère une enceinte composée de deux compartiments de même taille et séparé par un orifice. On remplit l'un des compartiments d'un gaz ; on constate que les molécules du gaz vont se répartir entre les deux compartiments jusqu'à atteindre une situation d'équilibre. Le principe de réversibilité semble mis en défaut.
Les époux Ehrenfest, chimistes, on proposé un modèle pour étudier ce phénomène : on considère deux urnes ; l'une des deux est remplie de N balles. À chaque instant on choisit « au hasard » une balle et on la change d'urne.

Avec les élèves, on peut proposer des simulations à l'aide d'Excel et leur demander d'énoncer des conjectures : y a-t-il retour à la situation initiale, au bout d'un temps « très long », que se passe-t-il ?
On peut aussi pour des petites valeurs de N traduire cette situation à l'aide de chaînes de Markov. L'espace des états est de cardinal $N+1$; l'état E_i étant celui où i balles se trouvent dans l'urne A.
On peut demander aux élèves d'écrire la matrice de transition et obtenir pour le temps n l'état probabiliste du système
La théorie nous dit que le temps nécessaire au retour à l'état initial (toutes les balles dans A) est 2^N, (1 tirage par seconde).

4. Modèle proie-prédateur

✯ Exercice 5 (d'après IMEL) On part de l'évolution de la population de deux espèces animales : les lynx et les lièvres.



Le lièvre est la proie (principale) du lynx.

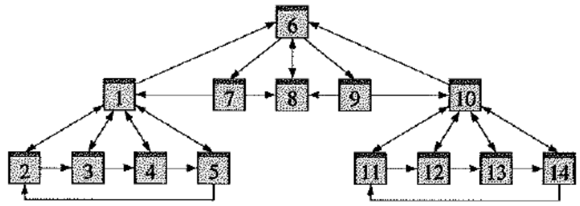
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) qui donnent respectivement le nombre de lynx et de lièvres pour l'année n.
L'évolution de la population des lynx dépend du taux de mortalité et du taux de natalité des lynx.
Comme les lynx sont des animaux très résistants, on peut considérer, que leur taux de mortalité est proportionnel au nombre de lynx.
Le taux de natalité lui dépend du nombre de lièvre présents.
Ainsi on peut estimer que $u_{n+1} = u_n - M \times u_n + (N \times v_n)u_n$. ($M, N$ constantes positives).
De même, on peut considérer que $v_{n+1} = v_n - (M' \times u_n)v_n + n'v_n$. ($M', N'$ constantes positives).
On peut étudier l'évolution des deux populations à l'aide d'une calculatrice.
Considérer $M = 0,03, N = 0,0002, M' = 0,001$ et $N' = 0,05$.
Choisir un nombre de lynx et de lièvre et observer l'évolution des deux populations. (Exemple pour 50 lynx et 200 lièvres).

5. Pagerank

Lorsque l'on fait une recherche sur internet le moteur de recherche renvoie un certain nombre de pages. on peut se poser la question de savoir comment ces pages sont classées. Certaines pages sont plus « importantes » que d'autres. Pour mesurer l'importance d'une page on choisit
d'accorder plus dimportance aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine.

d'accorde moins d'importance à une référence, si elle provient dune page qui dispose de nombreux liens.
À chaque page on associe un nombre réel qui mesure son importance ; ainsi si μ_i désigne le « score » de la page i, alors $\mu_i = \sum_{j\to i} \frac{\mu_j}{l_j}$, où l_j désigne le nombre de liens émis par la page j, la somme se faisant sur les pages j qui émettent un lien vers la page i.
On utilise l'outil matriciel pour « résoudre le système obtenu ».

☆ Exercice 6 (d'après un article de Michael Eisermann)



On considère un système constitué de 14 pages. Alors on est ramené au système :

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_4\\\mu_5\\\mu_6\\\mu_7\\\mu_8\\\mu_9\\\mu_{10}\\\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\\\mu_{14}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac15 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & 0 & 0 & 0 & \frac12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & \frac12 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & 0 & \frac12 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & 0 & 0 & \frac12 & 0
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_4\\\mu_5\\\mu_6\\\mu_7\\\mu_8\\\mu_9\\\mu_{10}\\\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\\\mu_{14}\end{pmatrix}$$

La matrice d'ordre 14 écrite est une matrice dite stochastique (ici la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1).
On recherche une matrice colonne μ qui vérifie $\mu = A\mu$. On peut appliquer certains résultats issus des chaînes de Markov. il ne s'agit évidemment pas ici de développer des outils d'algèbre linéaire, ni de résoudre directement le système.

Si la matrice A est régulière la solution μ telle que $\sum_{i=1}^{14} \mu_i = 1$ est aussi une colonne de la matrice $\lim_{n\to+\infty} A^n$.
Remarque On peut aussi interpréter la matrice précédente comme une matrice de transition : l'élément a_{ij} de cette matrice correspondant à la probabilité conditionnelle : sachant qu'on est sur la page j, a_{ij} est la probabilité d'aller sur la page i. Ainsi on imagine que pour un internaute passer d'une page à une autre peut être vu comme une marche aléatoire.
On peut faire observer aux élèves (XCAS par exemple) qu'il suffit pour obtenir une valeur approchée de la solution de calculer A^n pour n assez grand.

on obtient ici $\frac{1}{40}\begin{pmatrix}5\\2\\2\\2\\2\\6\\2\\4\\2\\5\\2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$.

Remarque : La suite A^n ne converge pas toujours ; alors on introduit un terme qui assure la convergence ; on remplace A par la marice $B = 0,85A + 0,15\frac{1}{n}M$ où M est la matrice $M = (m_{ij]}$ avec $m_{ij} = 1$ pour tous i et j.