

Probabilités - Exercices divers

Exercice 0

Un laboratoire a mis au point un alcootest et décide d'en vérifier la crédibilité. Les résultats obtenus sont les suivants :

- 2% des personnes contrôlées par la police sont effectivement en état d'ébriété ;
- 95 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété ;
- 5 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. Quelle est la probabilité pour que l'alcootest donne une indication correcte ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement en état d'ébriété sachant que l'alcootest était positif ?

Exercice 1

Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a ; b]$, quelle loi suit la variable aléatoire $Y = \frac{X - a}{b - a}$?

On pourra observer la simulation effectuée ci-dessous pour $a = 3$ et $b = 7$.

C2		f _n = (B2-3)/(7-3)	
	A	B	C
1	a=3	X	Y
2	b=7	5,16664187	0,54166047
3		4,95450005	0,48862501
4		6,99027268	0,98756817
5		4,31328894	0,32632221
6		5,65500493	0,66375123
7		6,64868699	0,91217175
8		5,60026005	0,65006501
9		4,9992127	0,49960318
10		6,11324393	0,77831098
11		3,01396667	0,00349142
12		5,00214636	0,50053659
13		6,92474156	0,98119539
14		4,73218037	0,43304509
15		3,58876596	0,14719146
16		6,11477113	0,77869278
17		6,01260677	0,75315219
18		6,6760385	0,91900963
19		6,21941993	0,80485498
20		5,76844142	0,69211035
21		4,70849189	0,42712297
22		6,94415571	0,98603893
23		3,39851748	0,09862937
24		5,68549605	0,67137401
25		6,10200844	0,77550236
26		4,68005871	0,42001468
27		3,70186076	0,17546519
28		4,81978951	0,45494738
29		3,99806816	0,24951704

Exercice 2

On suppose qu'il y a une probabilité de 0,3 d'être contrôlé lorsque l'on prend le métro. Henri prend le métro 15 fois par an.

1. Avec la calculatrice (une capture d'écran est donnée ci-dessous), quelle est la probabilité pour que Henri soit contrôlé entre 5 et 8 fois dans l'année ?

```

.7216214405
binomcdf(15,0.3,
8)
.9847574742
binomcdf(15,0.3,
4)
.5154910592

```

2. Malheureusement, Henri fraude : il ne paie jamais son ticket! Sachant que le prix d'un ticket est de 1,50 euros et qu'une amende coûte 20 euros, quelle est la probabilité pour Henri que le prix total des amendes payées soit supérieur à ce qu'il aurait dépensé en ne fraudant pas?

Exercice 3

Le temps d'attente à un guichet suit une variable aléatoire continue T , exprimée en heures, de loi exponentielle de paramètre 0,5.

1. Quel est le temps d'attente moyen?

```

RStudio - [Server 1]
> F:=x->-x*exp(-\lambda*x)+1+int(exp(-\lambda*t),t=0..x);
                                     F = x -> -x e^{(-\lambda x)} + 1 + \int_0^x e^{(-\lambda t)} dt
> diff(F(x),x);
                                     x \lambda e^{(-\lambda x)}
>

```

2. Calculer $P(T < 0,25)$, $P(T > 2)$, $P(T > 0,75)$ et $P(0,2 < T < 1,5)$ (on arrondira à 10^{-3} près).
3. Sachant qu'un client a déjà attendu 45 minutes, quelle est la probabilité qu'il attende moins de 2h en tout?
4. Six guichets sont ouverts.
Soit X le nombre de ces guichets pour lesquels le temps d'attente est inférieur à 30 minutes. On suppose le temps d'attente à un guichet indépendant du temps d'attente aux autres guichets.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b. Calculer la probabilité pour que, à au moins l'un de ces guichets, le temps d'attente soit inférieur à 30 minutes.
5. On décide d'ouvrir un guichet de plus dès que, sur les six guichets, le temps d'attente à au moins deux de ces guichets dépasse 30 minutes. Quelle est la probabilité d'ouverture de ce septième guichet?

Exercice 4

La distribution des notes obtenues à un concours suit une loi normale de moyenne 11 et d'écart-type 3. On sait que 30% des candidats n'ont pas été admissibles. Quelle est la barre d'admissibilité? (on pourra s'aider de la table de loi normale)

Exercice 5

On suppose qu'il y a une probabilité de 0,05 d'être contrôlé lorsque l'on prend le métro. Henri prend le métro 800 fois par an.

1. Quelle est la probabilité pour que Henri soit contrôlé entre 50 et 60 fois dans l'année ? On pourra s'aider de la capture d'écran ci-dessous, en l'expliquant.

```
normalcdf(50,60,  
40,√(38))  
.0517902412
```

2. Malheureusement, Henri fraude : il ne paie jamais son ticket ! Sachant que le prix d'un ticket est de 1,50 euros et qu'une amende coûte 20 euros, quelle est la probabilité pour Henri que le prix total des amendes payées soit supérieur à ce qu'il aurait dépensé en ne fraudant pas ?

Exercice 6

La masse des sacs de grains de blé produits par une coopérative agricole suit une loi normale, de moyenne 50 kg et d'écart-type inconnu.

95 % des sacs ont un poids compris entre 48 et 52 kg.

1. Quel est l'écart-type ?
2. On constitue des lots de 40 sacs, pris au hasard dans la production. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le poids moyen de ces 40 sacs.
 - a. Quelle est la loi suivie par X ?
 - b. Donner $P(X < 49,5)$.