<table>
<tr><th>N°</th><th>Exercices</th><th>Commentaires</th><th>Éléments de solution</th></tr>
<tr><td>1</td><td>La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race « Française Frisonne Pis Noir » peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.
a. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.
b. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.
c. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres par an.
2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :
a. la production maximale prévisible des 30 % de vaches les moins productives du troupeau.
b. la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.</td><td>Les calculatrices ne fournissent pas la probabilité $P(X < x)$, mais seulement $P(a < X < b)$.
Pour le calcul de $P(X < x)$, dans le cas où X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, la règle pratiquée est donc la suivante :
– si $x \geqslant \mu$, on utilise :
$P(X < x) = 0,5 + P(\mu < X < x)$;
– si $x \leqslant \mu$, on utilise :
$P(X < x) = 0,5 - P(x < X < \mu)$.
Pour entrer les paramètres dans la calculatrice, il faut saisir les valeurs de μ et de σ (et non σ^2).</td><td>1. $P(X < 5800)$
$= 0,5 + P(5800 < X < 6000) \approx 0,3085$
$P(5900 < X < 6100) \approx 0,1974$
$P(X > 6250) \approx 0,2660$
2.
a. Il s'agit de déterminer la valeur x de X telle que $P(X < x) = 0,30$.
$x \approx 5790$ litres de lait par an.
b. Il s'agit de déterminer la valeur x de X telle que $P(X > x) = 0,20$.
$x \approx 6336$ litres de lait par an.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>La fluorescence de la chlorophylle α en milieu océanique, exprimée en millivolts, est une variable aléatoire X de loi normale. Une étude expérimentale a permis d'obtenir les estimations suivantes : $P(X \leqslant 37) = 0,9332$ et $P(X \leqslant 23,5) = 0,2266$
1. Démontrer que m et σ sont solutions du système :
$$\left\{\begin{array}{lcl} m + 1,5\sigma &=& 37\\ m - 0,75\sigma &=& 23,5.\end{array}\right.$$
2. En déduire les valeurs de m et σ.</td><td>Exercice technique où la fluorescence de la chlorophylle n'est qu'un prétexte pour effectuer les calculs recherchés.</td><td>1. $P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < \dfrac{37-m}{\sigma}\right) = 0,9332$
$P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} < \dfrac{23,5-m}{\sigma}\right) = 0,2266$
$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{37-m}{\sigma} &=& 1,5\\ \dfrac{m-23,5}{\sigma} &=& 0,75.\end{array}\right.$$
D'où le système donné dans l'énoncé.
2. $m = 28$ et $\sigma = 6$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>N°</th><th>Exercices</th><th>Commentaires</th><th>Éléments de solution</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Une entreprise spécialisée dans la production de matériel optique fabrique des lentilles en grande série. On a mesuré la vergence x, exprimée en dioptries, de 1 000 lentilles de même type. On a obtenu la série statistique suivante des mesures x_i avec les effectifs correspondants :
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1,975</td><td>1,980</td><td>1,985</td><td>1,990</td><td>1,995</td><td>2,000</td><td>2,005</td><td>2,010</td><td>2,015</td><td>2,020</td><td>2,025</td></tr>
<tr><td>n_i</td><td>8</td><td>27</td><td>67</td><td>118</td><td>176</td><td>200</td><td>180</td><td>122</td><td>64</td><td>28</td><td>10</td></tr>
</table>
1. a. Représenter cette série statistique à l'aide d'un diagramme en bâtons.
b. Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série (on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près).
2. L'allure du diagramme précédent amène à considérer que la vergence d'une lentille, exprimée en dioptries, est une variable aléatoire X de loi normale. Considérons donc que X suit la loi normale $\mathcal{N}(2\ ;\ 0,01^2)$.
a. Comment a-t-on choisi les paramètres de cette loi ?
b. Une lentille est déclarée comme acceptable si sa vergence est comprise entre 1,98 et 2,02 dioptries. Elle est déclarée défectueuse dans le cas contraire.
Calculer la probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse.
3. Un réglage de la machine permet de modifier l'écart-type sans changer la moyenne. Considérons que X suit la loi normale $\mathcal{N}(2\ ;\ \sigma^2)$. Déterminer σ pour que la probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse soit inférieure ou égale à 0,01.</td>
<td>Ici, l'utilité de la loi normale est bien introduite (graphique) et on fait vérifier les valeurs des paramètres.
Intérêt du calcul du nouvel écart-type.</td>
<td>1. $\overline{x} \approx 2,00$; $\sigma \approx 0,01$
2. $P(1,98 < X < 2,02) \approx 0,9544$
La probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse est donc :
$1 - 0,9544 = 0,0456$.
3. $1 - P(1,98 < X < 2,02) \leqslant 0,01$
$P(1,98 < X < 2,02) \geqslant 0,99$
$P\left(\dfrac{-0,02}{\sigma} < \dfrac{X-2}{\sigma} < \dfrac{0,02}{\sigma}\right) \geqslant 0,99$
$P\left(Z < \dfrac{0,02}{\sigma}\right) - P\left(Z < \dfrac{-0,02}{\sigma}\right) \geqslant 0,99$
$2 \times P\left(Z < \dfrac{0,02}{\sigma}\right) - 1 \geqslant 0,99$
$P(Z < 2,575) = 0,995$
D'où $\sigma \approx 0,0078$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Un produit détachant est annoncé comme efficace à 90 % sur certains types de taches. Un magasin de nettoyage a obtenu de bons résultats dans 200 cas sur 250 essais effectués.
Dire si, au seuil de 1 %, l'annonce d'efficacité est bien légitime.</td>
<td>Il est nécessaire de remplacer 1 % par 5 %.
Problème du vocabulaire employé : efficacité, légitime...
De quel type de loi s'agit-il : binomiale ou normale ?
Préciser si l'on utilise la loi normale et dans ce cas parler de l'intervalle de fluctuation asymptotique.</td>
<td>$p = 0,90$; $n = 250$; $f = 0,8$
Intervalle de fluctuation asymptotique :
$[0,86\ ;\ 0,94]$ (en prenant 5 %).</td></tr>
</table>

N°	Exercices	Commentaires	Éléments de solution
5	Une entreprise locale a lancé un nouveau jeu ; 55 % des habitants de la localité l'ont acheté. **1.** On interroge un échantillon de 150 personnes. En utilisant une loi normale adaptée dont on justifiera la pertinence, calculer la probabilité que dans l'échantillon il y ait entre 75 et 90 personnes ayant acheté le jeu. **2.** L'entreprise veut profiter de son succès pour étendre la vente du jeu au national. Pour cela elle fait effectuer un sondage : sur 1 000 personnes interrogées, 650 sont intéressées par l'achat du jeu. Déterminer une estimation par intervalle de confiance avec un risque de 3 % de la proportion p d'individus dans la population prêts à acheter le nouveau jeu.	**1.** Les élèves n'ont pas les moyens de justifier la validité de l'approximation si ce n'est les conditions portant sur n, np et $np(1-p)$. Par contre, en leur disant que l'approximation par la loi normale est légitime, on peut leur demander en formation les paramètres de cette loi (moyenne et écart-type). Se pose la question de la légitimité de la loi normale si nos outils permettent de faire les calculs avec la loi binomiale. **2.** Le mot risque n'existe pas dans les programmes, il est donc à éviter. Par ailleurs, il est nécessaire de remplacer 3 % par 5 % et de demander l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95.	**1.** $m = np = 82,5$ $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 6,09$ $P(75 < X < 90) \approx 0,782$ **2.** $f = 0,65$ Intervalle de confiance (au niveau de confiance 0,95) : $[0,618\ ;\ 0,682]$.
6	Une liaison aérienne entre deux villes est assurée par un avion de 140 places. La réservation est obligatoire. L'expérience a montré que la probabilité pour qu'une personne confirme sa réservation et retire son billet est 0,8. On suppose que chaque personne se comporte indépendamment des autres. La compagnie accepte n réservations avec $n \geqslant 140$. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de réservations confirmées. **1.** Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser son espérance et sa variance. On admettra pour la suite de l'exercice que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,8n\ ;\ \left(0,4\sqrt{n}\right)^2\right)$ **2.** On cherche le nombre n de réservations que la compagnie peut accepter sachant qu'elle s'accorde un risque de 5 % de ne pas pouvoir satisfaire toutes les personnes ayant réservé. **a.** Justifier que ce risque se traduit par l'inégalité : $P(X \leqslant 140) \geqslant 0,95$. **b.** Démontrer que n est solution de l'inéquation : $0,8n + 0,658\sqrt{n} - 140 \leqslant 0$. **c.** Quel est le nombre maximum de réservations acceptables ?	Les paramètres de la loi normale sont précisés. Il est intéressant de calculer n. Emploi du mot risque à éviter.	**1.** $E(X) = np = 140 \times 0,8 = 112$ $V(X) = np(1-p) = 22,4$ **2.** $\dfrac{140-m}{0,4\sqrt{n}} \geqslant 1,645$ D'où l'inéquation recherchée. $n = 164$