Programme TS

Liste des démonstrations attendues :

1. **Analyse**

   a. **Suites**

   - Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
     - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang
     - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

     alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
   - Démontrer que si une suite est croissante et admet pour limite l alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.
   - Démontrer que la suite $(q)^n$, avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.

   b. **Fonction exponentielle**

   - Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.
   - Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

2. **Géométrie**

   Produit scalaire

   - Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + c = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls.
   - Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

3. **Probabilités et statistiques**

   a. **Conditionnement, indépendance**

   - Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B.

   b. **Loi exponentielle**

   - On montre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T\geq t}(T \geq t+h) = P(T \geq h)$.
   - Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

   c. **Loi normale centrée réduite**

   - Démontrer que pour $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif t_α tel que $P(-t_\alpha \leq X \leq t_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

   d. **Estimation**

   - Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$, alors, pour tout α dans $]0;1[$ on a,

     $\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$, où I_n désigne l'intervalle $\left[p - t_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + t_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Liste des démonstrations qu'il est intéressant de traiter :

1. **Analyse**

   a. **Suites**

   - Démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

   b. **Intégration**

   - Démontrer (*principe de la démonstration*) que si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f (*dans le cas où f est positive et croissante*).
   - Démontrer que toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (*dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum*).

2. **Géométrie**

Géométrie vectorielle

• Démontrer (*présentation*) le théorème dit « du toit ».

3. Probabilités et statistiques

Estimation

• Démontrer que l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ;\ F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion à estimer avec une probabilité au moins égale à $0,95$.