<u>Convexité : Application aux coûts total, moyen et marginal</u>
(Terminale ES-L)

Une entreprise fabrique des objets. On note x le nombre d'objets fabriqués, exprimé en milliers. Pour des raisons d'approvisionnement, x appartient à l'intervalle $[0;3,5]$.
On note $C(x)$, exprimé en millions d'euros, le coût de fabrication de x milliers d'objets.
On définit alors la fonction coût marginal C_m par $C_m(x) = C'(x)$ et la fonction coût moyen C_M par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

<u>Première partie :</u>

On suppose que le coût marginal est défini sur $[0;3,5]$ par :

$$C_m(x) = 1 + \frac{x-3}{8}e^x$$

et que le coût de fabrication de 0 objet est nul.

1) Définir ce que représente la fonction C par rapport à la fonction C_m.
2) Soit h la fonction définie sur $[0;3,5]$ par :

   $$h(x) = \frac{ax+b}{8}e^x,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

   Déterminer les réels a et b pour que, pour tout $x \in [0;3,5]$, $h'(x) = \dfrac{x-3}{8}e^x$.
3) En déduire que le coût total est défini sur $[0;3,5]$ par $C(x) = x + \dfrac{x-4}{8}e^x + \dfrac{1}{2}$.
4) Déterminer alors l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x pour $x \in]0;3,5]$.
5) Représenter, à l'aide d'un grapheur, les courbes des fonctions C_m, C, C_M dans un repère du plan.

<u>Deuxième partie :</u>

1) Graphiquement :
   - Déterminer pour quelle production la courbe de la fonction C semble avoir un point d'inflexion.
   - Qu'en est-il alors du coût marginal ?
2) Montrer les conjectures faites à la question précédente (On précisera de plus la convexité de la fonction C sur $[0;3,5]$).

Troisième partie :

On s'intéresse maintenant aux variations de la fonction coût moyen et on souhaite montrer, comme le suggèrent les courbes, que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.

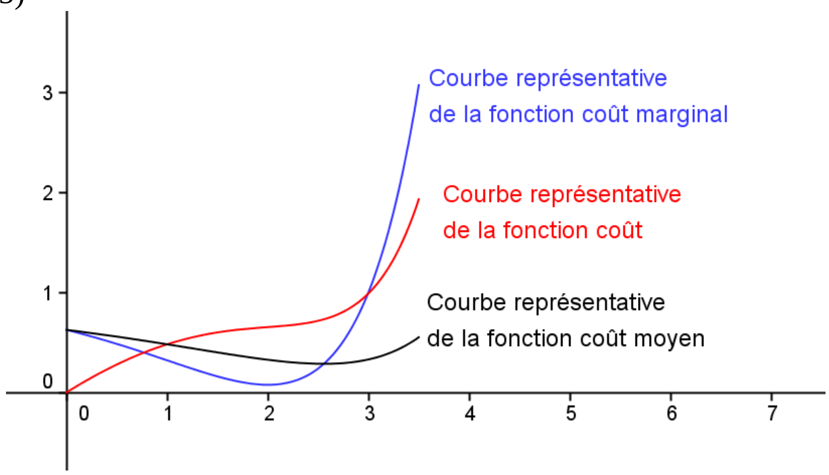
1) Déterminer, grâce à un logiciel de calcul formel, la dérivée de la fonction C_M et monter que, pour tout $x \in \left]0;3,5\right]$, $C_M'(x) = \dfrac{(x^2-4x+4)e^x-4}{8x^2}$.
2) Soit f la fonction définie sur $[0;3,5]$ par :
$$f(x) = (x^2-4x+4)e^x-4$$
Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α non nulle sur $[0;3,5]$ et déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près par excès.
4) Déduire des deux questions précédentes le signe de f sur $[0;3,5]$.
5) Vérifier que, pour tout $x \in \left]0;3,5\right]$, $C_M'(x) = \dfrac{f(x)}{8x^2}$.
En déduire les variations de C_M.
6) Pour quelle quantité d'objets fabriqués, arrondie à l'unité, le coût moyen est-il minimal ?
7) Calculer $C_M(2,557)$ et $C_m(2,557)$ en arrondissant à la centaine d'euros.
Montrer que ces deux valeurs sont égales à 100 euros près.
Conclure au problème posé dans cette troisième partie.

Eléments de correction :

1ère partie :

1) C est la primitive de C_m sur $[0;3,5]$ qui s'annule en 0.
2) $a=1$ et $b=-4$ donc $h(x) = \dfrac{x-4}{8}e^x$
3) C est définie sur $[0;3,5]$ par $C(x) = x + \dfrac{x-4}{8}e^x + k$ avec $C(0)=0$ d'où $k = \dfrac{1}{2}$
4) Pour tout $x \in \left]0;3,5\right]$, $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 1 + \dfrac{x-4}{8x}e^x + \dfrac{1}{2x}$

5)



2ème partie :

1) La courbe représentative de la fonction C semble avoir un point d'inflexion pour $x = 2$ soit 2000 objets produits. Il semble qu'alors le coût marginal soit minimal.

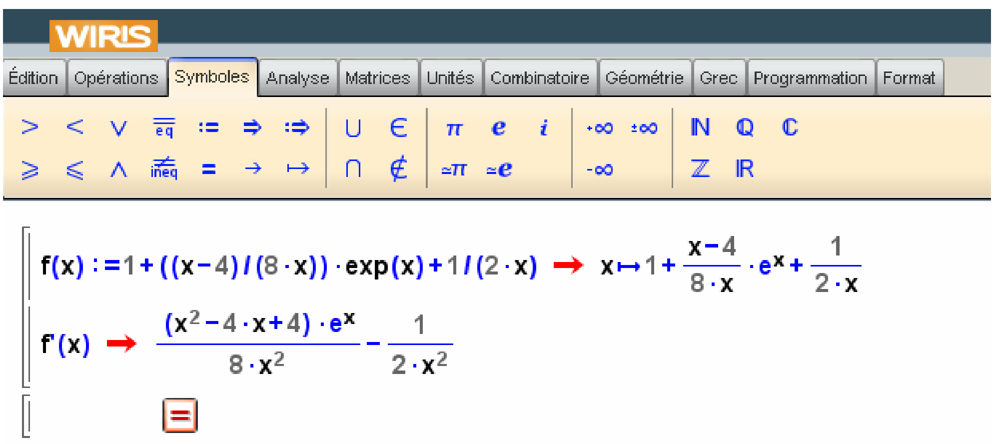
2) $C'(x) = C_m(x) = 1 + \frac{x-3}{8}e^x$

$C''(x) = \frac{x-2}{8}e^x$ est du signe de $x-2$ sur $[0;3,5]$, donc $C''(x) \leq 0$ sur $[0;2]$ et $C''(x) \geq 0$ sur $[2;3,5]$, donc C est concave sur $[0;2]$ et convexe sur $[2;3,5]$ et sa courbe représentative admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

Variations du coût marginal :
$C_m'(x) = C''(x)$ donc la fonction C_m est strictement décroissante sur $[0;2]$ et strictement croissante sur $[2;3,5]$, elle est donc minimale pour $x = 2$ soit pour 2000 objets fabriqués et vaut alors $C_m(2) = 1 - \frac{1}{8}e^2 \simeq 0,076368$ millions d'euros $\simeq$ 76368 euros.

3ème partie :

1)



Donc, pour tout $x \in \left]0;3,5\right]$, $C_M'(x) = \dfrac{\left(x^2 - 4x + 4\right)e^x - 4}{8x^2}$

2) $f'(x) = x\left(x-2\right)e^x$

x	0		2		$3,5$
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	$\simeq 70,5$

3) Sur $\left[0;2\right]$, $f(0) = 0$ et f est strictement décroissante donc pour $x \in \left]0;2\right]$, on a $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ est impossible sur $\left]0;2\right]$.

Sur $\left[2;3,5\right]$, $f(x) = 0$ admet une unique solution α d'après la propriété des valeurs intermédiaires.

A la calculatrice : $2,556 < \alpha < 2,557$ donc $\alpha \simeq 2,557$ à 10^{-3} près par excès

4)

x	0		$\alpha \simeq 2,557$		$3,5$
$f(x)$	0	-	0	+	

5) $\forall x \in \left]0;3,5\right]$, $C_M'(x) = \dfrac{f(x)}{8x^2}$ donc $C_M'(x)$ est du signe de $f(x)$ donc la fonction C_M est strictement décroissante sur $\left]0;2,557\right]$ et strictement croissante sur $\left[2,557;3,5\right]$.

6) C_M est minimale pour $\alpha \simeq 2,557$ soit pour 2557 objets fabriqués.

7) $C_M(2,557) \simeq 0,2857$ millions d'euros $\simeq 285700$ euros

$C_m(2,557) \simeq 0,2858$ millions d'euros $\simeq 285800$ euros

Ils sont bien égaux à 100 euros près.

Conclusion : Les coûts moyen et marginal sont bien égaux lorsque le coût moyen est minimal (le très faible écart obtenu dans les valeurs venant des arrondis faits dans les calculs).