∽ Académie d'Amiens

Nouveaux programmes de terminales S, ES et L ∽

Table des matières

Chapitre 1

Formation aux nouveaux programmes des terminales S–ES et L

1. Programmes

http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?pid_bo=25847

1.a) TS

Objectif général
Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :
* mettre en oeuvre une recherche de façon autonome ; * mener des raisonnements ;
* avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
* communiquer à l'écrit et à l'oral.
(......)
Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre. À titre indicatif, on pourrait consacrer la moitié du temps à l'analyse, l'autre moitié se répartissant équitablement entre géométrie et probabilités-statistique. Les capacités attendues

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
ANALYSE		
Suites	1. Récurrence. 2. Algo : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: rang à partir duquel $u_n > A$. 3. Théorèmes de comparaison. 4. Opérations sur les limites. 5. Limite de q^n. 6. Théorème de la convergence monotone.	1. Définition de limite infinie. 2. Varier les approches pour la récurrence. 3. Théorème des gendarmes admis. 4. Théorème de la convergence monotone admis. 5. Exemples de suites arithmético-géométriques. 6. AP : Approximations de réels ; nombre d'or...

Limites de fonctions	1. Limite finie, infinie en l'infini. 2. Limite infinie en un point. 3. Opérations. 4. Comparaison. 5. Interprétation graphique : asymptotes parallèles aux axes.	1. Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale. La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale. 2. Pas de théorie générale pour la composée de deux fonctions.
Continuité	1. Sur un intervalle. 2. Théorème des valeurs intermédiaires; cas d'une fonction strictement monotone. 3. Extension aux intervalles ouverts, semi-ouverts.	1. TVI admis. 2. Référence au tableau de variations. 3. On admet dérivable $\Rightarrow$ continue. 4. Algo : $f(x) = k$.
Dérivées	1. $\sqrt{u}, u^n, \mathrm{e}^u, \ln u, x \mapsto f(ax+b)$.	1. Passage à $f \circ u$: donné mais ce n'est pas une capacité. 2. Utilisation d'un logiciel de calcul formel. 3. AP Exemples de fonctions discontinues ou à dérivées non continues.
Fonctions sinus, cosinus	1. Dérivées 2. Propriétés dont parité et périodicité.	SPC Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique
Fonctions exponentielle	1. Démontrer l'unicité... ; existence admise 2. Démontrer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$; autres limites à exploiter 3. Relation fonctionnelle, variations	1. Exemple $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, où $u(x) = -kx$, $u(x) = -kx^2$ $(k > 0)$ 2. SPC et SVT Radioactivité 3. AP Étude de phénomènes d'évolution.
Fonction logarithme népérien	1. Variations, limites. 2. Relation fonctionnelle.	1. Pas de développement théorique sur les fonctions réciproques. 2. Logarithme décimal à évoquer. 3. SI Gain lié à une fonction de transfert. 4. SPC Intensité sonore, magitude d'un séisme, pH. 5. AP Équations fonctionelles.

Intégration	1. Propriétés. 2. $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, F est ... 3. Primitive de fonctions usuelles. 4. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. 5. Encadrer une intégrale. 6. Calculs d'aires.	1. l'IPP n'est pas un attendu du programme. 2. SPC Mouvement uniforme accéléré. 3. SI Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique. 4. AP Calcul du volume d'un solide.
Nombres complexes	1. Calcul algébrique. 2. Équations du second degré. 3. Représentation géométrique. 4. Forme trigonométrique et notation exponentielle.	Dimension historique
Géométrie dans l'espace	1. Positions relatives de droites et plans. 2. Orthogonalité d'une droite et d'un plan. 3. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires. 4. Représentation paramétrique d'une droite. 5. Produit scalaire. 6. Équation cartésienne de plan.	1. Étude de sections planes d'un cube 2. SI Cinématique et statique d'un système en mécanique. 3. AP Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires, intersection de trois plans.
Probabilité, statistique	1. Probabilités conditionnelles, arbres pondérés. 2. Indépendance d'événements. 3. Lois à densité sur un intervalle. (pas de théorie générale pour un intervalle non borné). 4. Loi uniforme, lois exponentielles, loi normale centrée réduite, (μ,σ^{ϵ}). 5. Théorème de Moîvre Laplace (admis). 6. Intervalles de fluctuation. 7. Intervalles de confiance, niveau de confiance.	1. La formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maîtrisée. 2. Attendus modestes dans le domaine de l'estimation. 3. SI et SPC Mesures physiques sur un système réel en essai. 4. SVT Analyse de graphques où les données sont fournies par des intervalles de confiance. 5. AP Prise de décision lors de la comparaison de deux proportions (par exemple lors d'un essai térapeutique).

1.b) Spécialité en S

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.
Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.
Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la

mise en oeuvre d'algorithmes.
Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités.

Exemples de problème	Contenus
ARITHMETIQUE	
1. Codages : codes barres, code ISBN, clé du rib, code INSEE. 2. Chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill. 3. Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichaël). Sensibilisation au système cryptographique RSA.	1. Divisibilité dans Z. 2. Division euclidienne. 3. Congruences dans Z. 4. PGCD de deux entiers. 5. Entiers premiers entre eux. 6. Théorème de Bézout. 7. Théorème de Gauss. 8. Nombres premiers. 9. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.
Matrices et suites	
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p. Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web. Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient. Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (Un) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: - recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; - étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

1.c) TES

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre.
A titre indicatif, on pourrait consacrer environ deux tiers du temps à l'analyse et le reste aux probabilités et à la statistique.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
ANALYSE		
Suites Suites géométriques.	• Reconnaitre et exploiter une suite géométrique dans une situation donnée. • Connaître la formule donnant $1+q+\cdots+q^n$ avec $q \neq 1$.	

Limite de la suite (q^n), q étant un nombre réel strictement positif. Suites arithmético-géométriques.	• Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison strictement positive. • Étant donnée une suite (q^n) avec $0 < q < 1$, mettre en oeuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil a partir duquel q^n est inférieur à un réel a positif donné. Traduire une situation donnée à l'aide d'une suite arithmético-géométrique	Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés a l'étude des suites, en particulier pour une approche expérimentale de la notion de limite. On détermine, sans soulever de difficulté, la limite de la somme $1+q+\cdots+q^n$ quand $0<q<1$. Le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme des n premiers termes de certaines suites géometriques fournit un exemple de suite croissante n'ayant pas pour limite $+\infty$. On évoque les aspects historiques et philosophiques de cette question en présentant quelques paradoxes classiques. Toute indication doit être donnée dans l'étude des suites arithmético-géométriques.
Notion de continuité sur un intervalle	• Exploiter le tableau de variation pour déterminer : - le nombre de solutions d'une équation du type $f(x)=k$; - le signe d'une fonction.	On se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
Fonctions exponentielles Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q>0$. Relation fonctionnelle. Fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.	• Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q. • Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$	Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et transforment les sommes en produits. On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction. On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ notamment avec $u(x)=-kx$ ou $u(x)=-kx^2$ ($k>0$), qui sont utilisés dans des domaines variés. La notion générale de composée est hors programme.
Fonction logarithme népérien Relation fonctionnelle.	• Connaitre la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Résoudre une équation de la forme $x^n=k$ sur $]0;+\infty[$ avec $k \in]0;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$.	Pour tout réel $x>0$, le réel lnx est l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^y=x$ d'inconnue y. On définit ainsi la fonction logarithme népérien.
Convexité Fonction convexe, fonction concave sur un intervalle.	• Reconnaître graphiquement des fonctions convexes, concaves.	Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite convexe sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes. On met en évidence ces notions sur les fonctions de référence : $x \mapsto x^2, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln x$.

Convexité et sens de variation de la dérivée.	• Utiliser le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée.	Le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée est conjecturé puis admis. On peut utiliser le signe de la dérivée seconde.
Point d'inflexion. Positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x$.	• Reconnaître graphiquement un point d'inflexion.	Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique traverse sa tangente. On met en évidence cette notion sur la fonction $x \longmapsto x^3$.
Intégration Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Théorème : si f est continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.		On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Intégrale d'une fonction de signe quelconque. Linéarité, positivité, relation de Chasles. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle.	• Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser une primitive de $x \longmapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$. • Calculer une intégrale. • Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de deux fonctions positives.	Une primitive F de la fonction continue et positive f étant connue, on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On fait prendre conscience aux élèves que certaines fonctions comme $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ n'ont pas de primitive « explicite » La formule $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, est étendue aux fonctions continues de signe quelconque. Les notions d'aire et de moyenne sont illustrées par des exemples issus des sciences économiques.
Contenus	Capacités attendues	Commentaires
PROBABILITES ET STATISTIQUE		
Conditionnement Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.	• Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maîtrisée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.

Notion de loi a densité a partir d'exemples Loi a densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associe Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x,y); x \in J \text{et} 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois a densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur $[a,b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaitre la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0,1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire a densité sur $[a,b]$ est introduite à cette occasion par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
Loi normale centree reduite $\mathcal{N}(0,1)$. Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.	• Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. • Connaitre une valeur approchée de la probabilité de l'événement $\{X \in [-1,96;1,96]\}$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. • Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. • Connaitre une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu-\sigma,\mu+\sigma]\}$; $\{X \in [\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]\}$; $\{X \in [\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]\}$; lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. À ce propos, on peut faire référence aux travaux de Moivre et de Laplace en les situant dans une perspective historique. Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. si $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On se limite à une approche intuitive de la notion d'espérance. On exploite les outils logiciels pour faire percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de cette loi n'est pas un attendu du programme. On illustre ces notions par des exemples issus des sciences économiques ou des sciences humaines et sociales.

Intervalle de fluctuation	• Connaître, pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique (*) au seuil de 95 % : $\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$, où p désigne la proportion dans la population.	La variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % avec une probabilité qui s'approche de 0,95 quand n devient grand. On admet le résultat ci-contre, qui est conforté grâce à la simulation. Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde. La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau.
Estimation Intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95(*). Niveau de confiance.	• Estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.	Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines. On énonce que p est élément de l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}},f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n. Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage. Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f-1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}};f+1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme.

(*) Avec les notations précédentes :
Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil 0,95 est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de 0,95 que n est grand.
Pour une valeur de p fixée, l'intervalle aléatoire $\left[F_n-\frac{1}{\sqrt{n}},F_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p à estimer avec une probabilité au moins égale à 0,95.
Un intervalle de confiance pour une proportion p au niveau de confiance 0,95 est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.
Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f.

1.d) Spécialité en ES

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude de telles situations conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche. Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en oeuvre d'algorithmes. Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples et de faire un lien avec les suites. Les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres. Au même titre que les graphes, elles apparaissent comme des outils pour résoudre des problèmes. Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités. Les thèmes abordés ne doivent pas faire l'objet d'un développement théorique.

Exemples de problèmes	Contenus
Recherche de courbes polynomiales passant par un ensemble donné de points. Gestion de flux, problèmes simples de partitionnement de graphes sous contraintes : problème du voyageur de commerce, gestion de trafic routier ou aérien, planning de tournois sportifs, etc. Modélisation d'échanges inter-industriels (matrices de Léontief). Codage par un graphe étiqueté, applications à l'accès à un réseau informatique, reconnaissance de codes. Minimisation d'une grandeur (coût, longueur, durée, etc.). Phénomènes évolutifs (variation d'une population, propagation d'une rumeur ou d'un virus, etc.).	• Matrice carrée, matrice colonne : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe. • Recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré connexe. • Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.

1.e) Algorithmique, raisonnement

En seconde, les élèves ont conçu et mis en oeuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.
Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :
- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.
Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.
L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, logique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.
À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.
Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie). Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :
- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction ; - ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
Boucle et itérateur, instruction conditionnelle Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :
- programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.
En complément des objectifs rappelés ci-dessous, un travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être mené en série scientifique (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence).
Notations mathématiques
Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in$,$\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.
Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.
Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à :
- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$, ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;

- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ; - reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2. Progressions

2.a) En terminale S

- $\boxed{\text{Les suites}}$: limites finies ou infinies ; comparaisons, opérations.
- $\boxed{\text{Probabilités conditionnelle}}$s.
- $\boxed{\text{Fonction exponentielle}}$: définition, propriétés algébriques, première approche de la fonction, dérivée de eû (pas de limites).
- $\boxed{\text{Nombres complexes}}$: forme algébrique, second degré, affixe, représentation géométrique.
- $\boxed{\text{Droite et plans}}$: (position relative de droites et de plans), géométrie vectorielle
- $\boxed{\text{Les suites}}$: suite et fin...
- $\boxed{\text{Continuité, théorème des valeurs intermédiaires puis limites}}$ (toutes les limites de e^u).
  Fonctions trigonométriques : dérivation (DM étude)
- $\boxed{\text{Intégration}}$: intégrale d'une fonction continue positive.
- $\boxed{\text{Lois à densité}}$: loi uniforme, loi normale
- $\boxed{\text{La fonction logarithme népérien}}$.
- $\boxed{\text{Nombres complexes}}$: forme trigonométrique et exponentielle
- $\boxed{\text{Intégration}}$: primitives, intégrale d'une fonction continue de signe quelconque, propriétés des intégrales, loi exponentielle
- $\boxed{\text{Intervalle de fluctuation, de confiance, niveau de confiance}}$.
- $\boxed{\text{Orthogonalité}}$: produit scalaire, orthogonalité

2.b) En terminale ES

- $\boxed{\text{Suites}}$ (1ère partie) : suites géométriques, limite de la suite $(q^n), q > 0$
- $\boxed{\text{Probabilités conditionnelles}}$
- $\boxed{\text{Notion de continuité sur un intervalle}}$
- $\boxed{\text{Fonctions exponentielles}}$
- $\boxed{\text{Intégration}}$: Intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a; b]$ définie comme aire sous la courbe.
- $\boxed{\text{Loi à densité sur un intervalle}}$: Loi uniforme sur $[a; b]$
- $\boxed{\text{Suites}}$ (2ème partie) : suites arithmético-géométriques.
- $\boxed{\text{Fonction logarithme népérien}}$.
- $\boxed{\text{Intégration}}$ (2ème partie : le reste).
- $\boxed{\text{Loi normale}}$.
- $\boxed{\text{Convexité}}$.
- $\boxed{\text{Estimation}}$.

3. Démonstrations au programme

'Voir les deux démonstrations du calcul intégral ?

1. Si deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que :
   - $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

   alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
2. si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
4. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Intéressant Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

5. Unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Intéressant Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et a pour dérivée f (à faire pour f positive et croissante).

Intéressant toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (à faire dans le cas d'un intervalle borné ; on admet que f admet un minimum). continue sur un intervalle admet des primitives.

Intéressant Théorème dit « du toit ».

7. Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c sont trois nombres réels non tous nuls.
8. Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
9. Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B aussi.
10. Une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$.
11. L'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.
12. Démontrer que pour $\alpha \in]0,1[$ il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
13. On peut montrer quel'espérance d'une v.a qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vaut 0.
14. Si la variable aléatoire $X\acute{N}_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ alors, pour tou $\alpha \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$, où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},\ p + u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Intéressant Pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, contient pour n assez grand p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

4. Théorèmes admis

1. Théorème dit des « gendarmes ».
2. Théorème de la convergence monotone.

3. TVI
4. Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.
5. Existence de la fonction exponentielle.
6. IPP : n'est pas un attendu du programme.
7. Théorème de Moîvre Laplace.
8. $E(X-E(X))^2 = 1$, où X v ;a qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

5. Spécialité

5.a) Exemples d'activités

> Les matrices sont vues comme des tableaux de nombres ; comme introduction, on peut s'inspirer des anciens documents d'accompagnement de ES ou de ceux de TS qui viennent d'être publiés.

5.b) Convergence de matrice

Le programme de spécialité en S prévoit l'étude de suites de matrices ; on trouve de nombreux exercices dans les annales d'écoles de commerces. On limite le travail « à la main » à des matrices d'ordre 2, voire 3. au-delà **logiciel type XCAS ou calculatrice**.
Un résultat essentiel :

THÉORÈME 1
Soit P une matrice stochastique (la somme des éléments de toutes les lignes est égal à 1), régulière (une puissance de P à tous ces éléments non nuls. Alors :

1. Il existe un unique vecteur de probabilité (matrice ligne dont la somme des éléments [positifs] est égale à 1) t tel que $t = tP$.
2. La suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice Q dont toutes les lignes sont identiques égales à t.
3. Si p est un vecteur de probabilité quelconque , alors la suite des matrices lignes $(pP^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t.

☆ EXERCICE 1 (EMIAI) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (S) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 9b_n \end{cases}$$

1. Montrer que l'on peut écrire (S) sous la forme $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, où A est une matrice d'ordre 2 qu'on précisera.
2. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer le produit de matrices : $B = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} P^{-1}$.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B^n = P \begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1}$.
6. En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n lorsque $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$.

Différentes études sont prévues ; les processus dits stochastiques doivent être étudiés. On peut en particulier s'inpirer de sujets de TES utilisant des graphes pondérés.

☆ EXERCICE 2 http://serge.mehl.free.fr/exos/graphe_matr_transition.htmlSerge Mehl
Dans une région, on considère 3 types de temps :
Beau (événement B), Variable (V) et Pluvieux (P).

- Lorsque le temps est beau, on estime à $\dfrac{1}{3}$ la probabilité qu'il fasse encore beau le lendemain et à $\dfrac{1}{6}$ qu'il pleuve.
- Si le temps est variable, on estime à $\dfrac{1}{4}$ la probabilité qu'il le reste le lendemain et à $\dfrac{1}{2}$ qu'il pleuve.
- Enfin, s'il pleut, on estime à $\dfrac{1}{4}$ la probabilité qu'il pleuve encore le lendemain et à $\dfrac{1}{2}$ qu'il fasse beau.

1. Représenter cette situation météorologique par un graphe probabiliste et établir sa matrice de transition.
2. Aujourd'hui, il fait beau. Quelle sont les probabilités, dans 2 jours, des 3 types de temps ?

✯ EXERCICE 3 (EXERCICES INSPECTION 2003) Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. On constate que, chaque année, 5 % des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20 % des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A.

1. Dessiner un graphe décrivant cette situation.
2. Écrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.
3. En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classés dans la catégorie A.
   Calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004.
4. L'état (0,5 ; 0,5) est-il stable ? Justifier cette réponse.
5. Trouver vers quel état converge ce système.

✯ EXERCICE 4 (ANTILLES-GUYANE – SEPTEMBRE 2009) **Partie A**

Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.
Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.
On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.
Soit n est un entier entre 1 et 31. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n-ième jour, où :
a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;
b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Écrire la matrice de transition, notée M, associée à cette situation.
3. Déterminer l'état initial P_1.
4. a. Calculer P_2 (faire apparaître les calculs). Interpréter le résultat obtenu.
   b. On suppose que $M^5 = \begin{pmatrix} 0,367 & 0,633 \\ 0,317 & 0,683 \end{pmatrix}$ et $M^6 = \begin{pmatrix} 0,352 & 0,648 \\ 0,324 & 0,676 \end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.
   En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6ᵉ jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.
5. Soit P= $(x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable.
   Déterminer x et y ; en donner une interprétation.
6. Montrer que pour n entier compris entre 1 et 30 on a $a_{n+1} = 0,55a_n + 0,15$.

Partie B

Pour n entier, $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = 0,55u_n + 0,15 \quad \text{et} \quad u_1 = 0,8.$$

1. On pose $U_n = u_n - \dfrac{1}{3}$.
   Montrer que la suite (U_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.
2. Exprimer U_n puis u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n). Quel résultat retrouve-t-on ?

5.c) Marches aléatoires

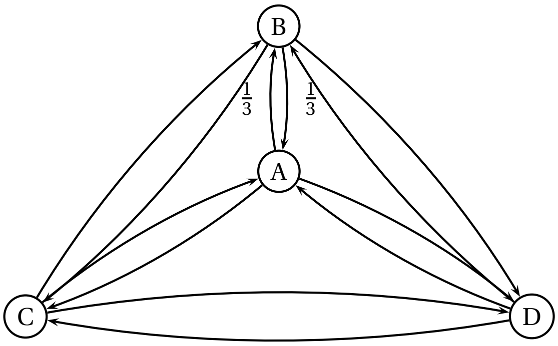
On peut retrouver la fiche complète à l'adresse :
http://www2.cndp.fr/gtd_maths/pdf/ESEMA004.pdf

« PROMENADES ALEATOIRES SUR UN TÉTRAÈDRE »

On promène un pion sur les sommets d'un tétraèdre ; toutes les secondes, on déplace le pion d'un sommet à un autre, en choisissant au hasard parmi les trois sommets possibles. On s'intéresse au temps écoulé entre le début de la promenade du pion et le premier retour au point de départ. On limite la promenade à une minute. On utilise des lancers de dés, simulés ou non, pour les déplacements du pion.

On suppose que l'on part du sommet A.

On peut illustrer la situation par le graphe suivant (toutes les flèches sont « codées » $\frac{1}{3}$) :



1. Soit k un entier naturel appartenant à l'intervalle $[2;60]$ et p_k la probabilité que la durée de la promenade soit égale à k.
   Justifier que $p_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{3}\right)$. (vous pourrez vous aider d'un arbre).
2. Justifier que $p_{60} = 1 - \sum_{k=2}^{59}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{58}$.
3. L'espérance ou moyenne théorique de la durée de la promenade est donnée par
   $$\sum_{k=2}^{60} k \times p_k$$
   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, calculer cette somme.

☆ EXERCICE 5
On note Te un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et on considère une marche aléatoire sur les sommets de Te. On choisit le sommet A_1 comme origine de la marche, et on avance à chaque pas de manière indépendante en choisissant uniformément au hasard parmi les quatre sommets $\{A_1;A_2;A_3;A_4\}$.
Soit T le temps de premier retour en A_1.

1. Donner les valeurs possibles de la variable aléatoire T. Quelle est la probabilité que le temps de retour soit de 1, respectivement de 2 ?
2. Écrire explicitement tous les chemins possibles de 3 pas. Calculer alors $P(\mathrm{T}=3)$.
3. Expliquer le résultat suivant : $P(T=k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.

☆ EXERCICE 6 Une fourmi se déplace sur les bords d'un triangle ABC ; chaque seconde elle change de sommet.
On cherche à savoir où elle se trouve au bout de n secondes.

1. Donner la matrice de transition M et le graphe probabiliste.
2. À l'aide de la matrice M déterminer la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes alors qu'elle était partie du point A .
3. Que se passe-t-il au bout d'un grand laps de temps ?

☆ EXERCICE 7 On considère une marche aléatoire sur un triangle ABC dont la matrice de transition associée est

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'élément T_j de la matrice T est la prbabilité sachant qu'on est sur le sommet i (A coorespond à 1, B à 2 et C à 3) d'aller sur le sommet j.

a) La marche aléatoire part du sommet A ; quelle est la probabilité d'être sur le sommet C après 2 étapes ? 3 étapes ?

b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel donner la probabilité de revenir au sommet A après 100 étapes.

c) Déterminer l'état stable par T à l'aide d'une résolution de système.

d) Que constate-t-on ?

✯ EXERCICE 8
Marche aléatoire sur un triangle.
Soit ABC un triangle direct.
On suppose que l'on peut passer d'un sommet à un autre avec une probabilité p, si le saut est effectué dans le sens direct et une probabilité $q = 1 - p$ sinon.
La matrice de transition associée est $\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$.
On part de A ; quelle est la probabilité de retourner en A en 1 saut, 2 sauts, 3 sauts ...
Quelle est la probabilité de se trouver en C en 4 sauts ?
<u>Cas particulier $p = q = \dfrac{1}{2}$</u>
Montrer que la probabilité de revenir en A en n sauts est $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

✯ EXERCICE 9 (PROBLÈME DE DÉPOUILLEMENT) Au cours d'un scrutin opposant deux candidats, A obtient 600 voix tandis que 400 voix se sont portées sur B.
On imagine que l'on procède au dépouillement ; on se pose la question suivante :
« Quelle est la probabilité qu'au cours du dépouillement le candidat A ait été toujours en avance (éventuellement à égalité) sur le candidat B. »
Il s'agit d'un problème de dénombrement de chemins.
Le candidat A a obtenu 200 voix de plus que le candidat B ; on va donc considérer les points de coordonnées (x, y), où x et y sont des entiers et $x \in [0; 1000]$; y représente la différence entre le nombre de voix obtenu par A et par B.
☞ On va dénombrer tous les chemins qui mènent du point $O(0;0)$ au point de coordonnées $(1000;200)$ (nombre de cas possibles)
Tout d'abord, en quel sens sommes-nous dans le cadre d'une marche aléatoire ?
Le nombre de chemins cherchés est : $\binom{1000}{600}$. (en effet un chemin est une suite de 1 et -1, où il y a 600 fois le 1).
☞ Cas favorables : il s'agit de dénombrer tous les chemins qui vont du point O au point $C(1000, 200)$ sans passer sous l'axe des abscisses ou de chemins allant du point $D(0; 1)$ au point $E(1000; 201)$ sans toucher l'axe des abscisses.
Pour cela, on introduit le point $F(1000, -201)$; alors le nombre cherché est égal au nombre de chemins joignant C à E, moins le nombre de chemins allant de C à F, c'est à dire :

$$\binom{1000}{600} - \binom{1000}{399}.$$

(pour le deuxième nombre il suffit de remarquer que le nombre de 1 et -1 est 1000 et que leur différence est 202 : il doit donc y avoir 399 fois le 1 et 601 fois le -1).
☞ Ainsi la probabilité p cherchée est le quotient des deux nombres précédents et $p \approx 0,3$.

5.d) Urnes d'Ehrenfest

> Le problème :
> On considère une enceinte composée de deux compartiments de même taille et séparé par un orifice. On remplit l'un des compartiments d'un gaz ; on constate que les molécules du gaz vont se répartir entre les deux compartiments jusqu'à atteindre une situation d'équilibre. Le principe de réversibilité semble mis en défaut.
> Les époux Ehrenfest, chimistes, on proposé un modèle pour étudier ce phénomène : on considère deux urnes ; l'une des deux est remplie de N balles. À chaque instant on choisit « au hasard » une balle et on la change d'urne.

Avec les élèves, on peut proposer des simulations à l'aide d'Excel et leur demander d'énoncer des conjectures : y a-t-il retour à la situation initiale, au bout d'un temps « très long », que se passe-t-il ?
On peut aussi pour des petites valeurs de N traduire cette situation à l'aide de chaînes de Markov. L'espace des états est de cardinal $N + 1$; l'état E_i étant celui où i balles se trouvent dans l'urne A.

On peut demander aux élèves d'écrire la matrice de transition et obtenir pour le temps n l'état probabiliste du système
La théorie nous dit que le temps nécessaire au retour à l'état initial (toutes les balles dans A) est 2^N, (1 tirage par seconde).

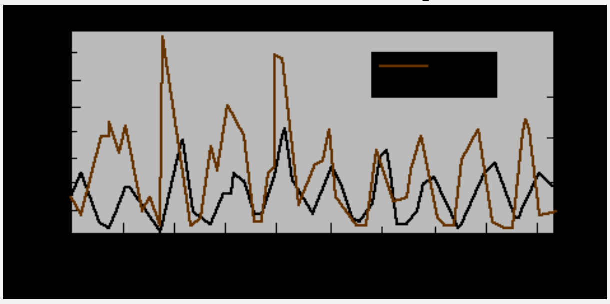
✯ EXERCICE 10
On modélise le mouvement de 7 molécules entre deux compartiments A et B de la façon suivante : chaque seconde une molécule, choisie au hasard parmi les 7 molécules, change de compartiment.
On note X_n le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n.

1. Donner la matrice de transition associée à ce modèle.

2. À l'aide d'un outil adapté estimer la probabilité qu'il y ait 4 molécules dans le compartiement A.

6. Modèle proie-prédateur

✯ EXERCICE 11 (D'APRÈS IMEL) On part de l'évolution de la population de deux espèces animales : les lynx et les lièvres.



Le lièvre est la proie (principale) du lynx.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) qui donnent respectivement le nombre de lynx et de lièvres pour l'année n.
L'évolution de la population des lynx dépend du taux de mortalité et du taux de natalité des lynx.
Comme les lynx sont des animaux très résistants, on peut considérer, que leur taux de mortalité est proportionnel au nombre de lynx.
Le taux de natalité lui dépend du nombre de lièvre présents.
Ainsi on peut estimer que $u_{n+1} = u_n - M \times u_n + (N \times v_n)u_n$. ($M, N$ constantes positives).
De même, on peut considérer que $v_{n+1} = v_n - (M' \times u_n)v_n + n'v_n$. ($M', N'$ constantes positives).
On peut étudier l'évolution des deux populations à l'aide d'une calculatrice.
Considérer $M = 0,03, N = 0,0002, M' = 0,001$ et $N' = 0,05$.
Choisir un nombre de lynx et de lièvre et observer l'évolution des deux populations. (Exemple pour 50 lynx et 200 lièvres).

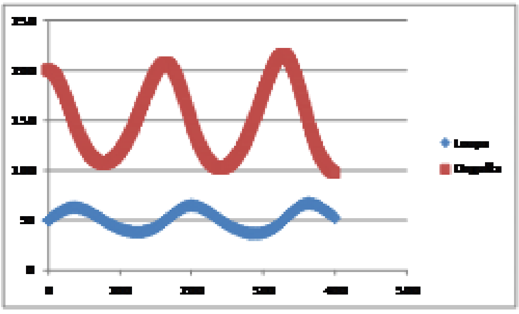
✯ EXERCICE 12 Une étude est menée dans le massif du Mercantour pour mesurer l'effet de l'introduction de loups sur la population d'ongulés.

a) Les loups sont résistants, leur taux de mortalité, indépendant de la quantité de nourriture est de 0,03, mais les jeunes ont besoin de nourriture et leur taux de survies est proportionnel à la quantité d'ondulés avec un coefficient égal à 0,0002. On note u_n (respectivement v_n) la quantité de loups (respectivement ongulés) recensée l'année n Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,97u_n + 0,0002u_n v_n$.

b) Les ongulés, mangés par les loups, ont un taux de mortalité proportionnel au nombre de loups avec un coefficient de 0,001 mais leur taux de natalité est 0,05 (indépendant du nombre de loups).

   Donner l'expression de v_{n+1} en fonction de u_n et v_n , pour tout nombre entier naturel n.

c) À l'aide d'un tableur on trace les nuages de points correspondant aux deux suites :



Que remarque-t-on ? Déterminer graphiquement la période des oscillations, les tailles maximum et minimum ainsi que la valeur moyenne de l'effectif de chacune des populations.

d) Une association écologique locale souhaiterait introduire plus de loups.

Les scientifiques montrent alors que le coefficient de mortalité des ongulés augmenterait jusqu'à la valeur 0,0025. Tracer le nuage de points. Que remarque-t-on ?

e) Déterminer l'état stable du système initial. On le notera $S = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

f) On admet qu'étudier le système initial au voisinage du point d'équilibre revient à étudier le système matriciel :

$V_{n+1} - V_n = JV_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $\quad V_n = U_n - S$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0,01 \\ -0,15 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner alors le système linéaire vérifié par les deux suites.

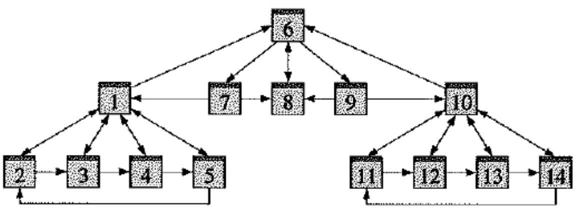
g) Le système peut s'écrire $U_{n+1} = AU_n + C$; montrer que $V_{n+1} = A^n V_0$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel étudier le comportement de la suite V_n.

6.a) Pagerank

Lorsque l'on fait une recherche sur internet le moteur de recherche renvoie un certain nombre de pages. on peut se poser la question de savoir comment ces pages sont classées. Certaines pages sont plus « importantes » que d'autres. Pour mesurer l'importance d'une page on choisit
d'accorder plus d'importance aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine.
d'accorde moins d'importance à une référence, si elle provient d'une page qui dispose de nombreux liens.
À chaque page on associe un nombre réel qui mesure son importance ; ainsi si μ_i désigne le « score » de la page i, alors $\mu_i = \sum_{j \to i} \frac{\mu_j}{l_j}$, où l_j désigne le nombre de liens émis par la page j, la somme se faisant sur les pages j qui émettent un lien vers la page i.
On utilise l'outil matriciel pour « résoudre le système obtenu ».

✯ Exercice 13 (d'après un article de Michael Eisermann)



On considère un système constitué de 14 pages. Alors on est ramené au système :

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_4\\\mu_5\\\mu_6\\\mu_7\\\mu_8\\\mu_9\\\mu_{10}\\\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\\\mu_{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac15 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & 0 & 0 & 0 & \frac12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & \frac12 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & 0 & \frac12 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac15 & 0 & 0 & \frac12 & 0
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_4\\\mu_5\\\mu_6\\\mu_7\\\mu_8\\\mu_9\\\mu_{10}\\\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{13}\\\mu_{14}\end{pmatrix}$$

La matrice d'ordre 14 écrite est une matrice dite stochastique (ici la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1).

On recherche une matrice colonne μ qui vérifie $\mu = A\mu$. On peut appliquer certains résultats issus des chaînes de Markov. il ne s'agit évidemment pas ici de développer des outils d'algèbre linéaire, ni de résoudre directement le système.

Si la matrice A est régulière la solution μ telle que $\sum\limits_{i=1}^{14}\mu_i = 1$ est aussi une colonne de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

Remarque On peut aussi interpréter la matrice précédente comme une matrice de transition : l'élément a_{ij} de cette matrice correspondant à la probabilité conditionnelle : sachant qu'on est sur la page j, a_{ij} est la probabilité d'aller sur la page i. Ainsi on imagine que pour un internaute passer d'une page à une autre peut être vu comme une marche aléatoire.

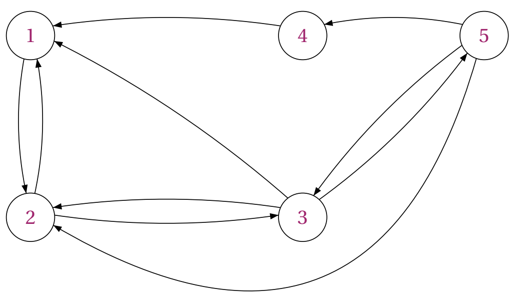
On peut faire observer aux élèves (XCAS par exemple) qu'il suffit pour obtenir une valeur approchée de la solution de calculer A^n pour n assez grand.

on obtient ici $\dfrac{1}{40}\begin{pmatrix}5\\2\\2\\2\\2\\6\\2\\4\\2\\5\\2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$.

Remarque : La suite A^n ne converge pas toujours ; alors on introduit un terme qui assure la convergence ; on remplace A par la marice $B = 0,85A + 0,15\dfrac{1}{n}M$ où M est la matrice $M = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = 1$ pour tous i et j.

✮ EXERCICE 14

On considère un système constitué de 5 pages ; les liens entre les pages sont figurés par le graphe ci-dessous.



Ainsi étant sur la page 5, on peut atteindre de manière équiprobable les pages 2, 3 ou 4.

1. Vérifier que la matrice de transition associée est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, où a_{ij} représente la probabilité d'aller sur la page j étant sur la page i.
2. Résoudre l'équation $X = XA$, où X désigne la matrice ligne $X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ avec $a+b+c+d+e=1$.
3. On suppose qu'au début de notre « surf » on se trouve sur la page 1 ; qu'elle est la probabilité de se trouver sur la page 3 au bout de 2 étapes ?
4. À l'aide de l'outil le plus adapté calculer A^2, A^{10}, A^{100} et interpréter la réponse obtenue.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On considère la matrice $B = 0,85A + 0,15 \times \frac{1}{5}M$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (B est la matrice correspondant à une perturbation du système).
   À l'aide de l'outil le plus adapté déterminer $\lim_{n\to+\infty} B^n$ et comparer avec les résultats précédents.

7. Activité

Clés de contrôle *(D'après IREM de Marseille)*.

1. Le numéro I.N.S.E.E. d'un individu est constituée de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite, le premier est 1 ou 2 suivant qu'il s'agit d'un homme ou d'une femme. Les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance, les deux suivants le mois de naissance, les deux suivants le département, les trois suivants la commune de naissance, les trois suivants le numéro d'inscription sur le registre d'état civil, les deux derniers forment une clé K calculée de la manière suivante : désignons par A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche ; soit r le reste de la division euclidienne de A par 97 ; on prend K = 97 - r.
   a. Vérifez pour votre numéro I.N.S.E.E.
   b. Ecrivons A sous la forme : $A = H \times 10^6 + L \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant A < 10^6$.
      i. Montrer que r est aussi le reste de la division euclidienne de $27 \times H + L$ par 97.
      ii. Soit A_1 le nombre constitué par un numéro I.N.S.E.E. (y compris la clé). Montrer que si un des chiffres de A_1 et un seul est erroné, l'erreur est détectée. Montrer que si deux chiffres consécutifs distincts sont permutés, l'erreur est détectée.
      iii. Donner un exemple d'erreur non détectée.
2. Numéro I.S.B.N. L'International Standard Book Number utilise des mots de longueurs 10 constitués avec les chiffres $0, 1 \dots 9$ et le symbole X (qui représente le nombre 10) ; le symbole X ne sera utilisé, si nécessaire, que pour la clef. Exemples : 284180013X, 2842250001, 0471621870,0121632512. Le premier chiffre représente le pays, un bloc de chiffres est attribué à un éditeur, un autre bloc est le numéro donné par l'éditeur, le dernier symbole est la clé, calculée de telle sorte que si $a_1 a_2 \dots a_{10}$ désigne un numéro I.S.B.N.
   $$\sum_{i=1}^{10} i a_{11-i}$$
   soit divisible par 11.
   a. Vérifier les exemples donnés.
   b. Montrer que si un chiffre (et un seul) est erroné, l'erreur est détectée.
   c. Montrer que si deux chiffres distincts sont permutés, l'erreur est détectée.
   d. Trouver toutes les valeurs de a et de b telles que 2842250ab1 soit un code I.S.B.N. valide.

e. Pourquoi prendre la somme des ia_{11-} et pas seulement la somme des a_i ?

3. Le code UPC (universal product code)
Le code I.S.B.N. a le désavantage d'utiliser pour la clé un symbole «parasite »(le X). Ceci provient du fait que l'on travaille modulo 11. Peut-on faire une étude analogue en travaillant modulo 10 ? Voici le code UPC, utilisé avec les codes barres, qui est basé sur ce principe. Le code UPC utilise des nombres de 13 chiffres $a_1,\dots a_{13}$ (12 chiffres pour désigner un produit, et une clé), de telle sorte que

$$3\left(\sum_{i=1}^{6} a_{2i}\right)+\sum_{i=0}^{6} a_{2i+1}$$

soit divisible par 10.

a. Calculer la clé si le nombre formé par les 11 chiffres de gauche est 325456008826

b. Montrer que si un chiffre (et un seul) est erroné, l'erreur est détectée.

ISBN 2-84177-073-7

9 782841 770731

✭ Exercice 15 (Le Carré de Vigenère (XVII $^{\text{ème}}$ siècle)) Un mot-clef est choisi : exemple MATHS. Le message à crypté est écrit au dessous :

Mot-Clef	M	A	T	H	S	M	A	T	H	S	M	A	T	H	S	M
Message en clair	q	u	e	l	m	e	s	s	a	g	e	c	o	d	e	r
Message crypté	C	U	X													

Clair	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
2	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
3	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
4	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
5	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
6	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
7	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
8	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
9	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
11	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
12	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
15	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
16	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
17	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
18	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
19	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
20	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
21	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
22	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
23	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
24	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
26	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

✭ Exercice 16 (chiffre de Hill) http://www.apprendre-en-ligne.net/auteur/articles/Hill.pdf
Ce chiffre a été publié par Lester S. Hill en 1929 (cf. réf. [2]). C'est un chiffre polygraphique, c'est-à-dire qu'on ne (dé)chiffre pas les lettres les unes après les autres, mais par paquets.

1. On remplace les lettres par leur rang dans l'alphabet :

A	B	C	D	E	F...	X	Y	Z
1	2	3	4	5	...	24	25	26

2. Les lettres L_k et L_{k+1} du texte seront chiffrées C_k et C_{k+1} par :

$$\begin{pmatrix} C_k \\ C_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_k \\ L_{k+1} \end{pmatrix} \pmod{26}$$

$\boxed{3.}$ Exemple :...

$\boxed{4.}$ Décodage : il s'agit d'inverser la matrice : tout d'abord on doit avoir $ad - bc \neq 0 \pmod{26}$.

Or la matrice inverse dans $\mathbb{R}$ de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$: on va traiter sur un exemple le problème de l'inversion dans $\mathbb{Z}_{26}$.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (calcul à la main ou outil adapté) : ce n'est pas une matrice à coefficients entiers naturels.

b. On cherche donc l'inverse de 7 modulo 26, c'est à dire un entier a tel que $7a \equiv 1 \pmod{26}$.

- « à la main » : tester toutes les valeurs.
- Bézout : résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $7u + 26v = 1$: a est la valeur de u entière de $[1;25]$.

Ici, on trouve $a = 15$ et donc la « matrice de décryptage » est $\begin{pmatrix} 18 & 23 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$.

☆ EXERCICE 17 (COMPLÉMENT) Attaque du chiffre de Hill : Vous avez intercepté le message suivant de vos ennemis : YKTZZUDCLWQOAGKIHXRVANYSPWBYDCLS. Votre espion vous a informe que pour communiquer, l'état-major adverse utilise le chiffrement de Hill. En outre, connaissant le côté protocolaire des messages militaires, vous êtes sûr que ce message commence par MONGENERAL. On note A la matrice de chiffrement.

a. Justifier que $\begin{pmatrix} 24 & 19 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

b. Que suffirait-il pour retrouver A. Pourquoi cela est impossible ici ?

c. Retrouver A en exploitant une autre égalité (du type de la précédente).

d. Décrypter le message complet.

Solution de l'exercice 17:

http://www.bibmath.net/crypto/poly/hill/hillcor.pdf

8. Probabilités

8.a) Centrer et réduire une loi X

> Soit X une loi de paramètre $E(X)=m$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}<$.
> La loi centrée réduite correspondant est $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$.
> Alors $E(Z)=0$ et $\sigma(Z)=1$. (Les paramètres de Z ne dépendent pas de ceux de X).

Lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $m=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.
La variable aléatoire $F_n=\dfrac{X_n}{n}$ correspond à la proportion de succès : son espérance (p) ne dépend pas de n et son écart-type $\dfrac{p(1-p)}{n}$ diminue lorsque n augmente.

Remarque : on a aussi $Z_n=\dfrac{\dfrac{X_n}{n}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$.

8.b) Lois continues

DÉFINITION 1
On appelle loi uniforme sur l'intervalle $I=[a;b]$ la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$.
Ainsi si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, alors pour tout intervalle $[c;d]\subset[a,;b]$, $P(X\in[c,d])=\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}$

✯ EXERCICE 18 A partir de 7 heures les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt est la variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0 ;30].

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 10 minutes.

Solution de l'exercice 18:
Soit X la variable aléatoire qui donne le temps écoulé entre 7 heures et l'heure d'arrivée de l'usager. Alors : $P(X\in[10;15])+P(X\in[25;30])=\dfrac{1}{3}$ et $P(X\in]0;5[)+P(X\in]15;20[)=\dfrac{1}{3}$.

8.c) Loi exponentielle

✯ EXERCICE 19
La durée de vie d'un appareil est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Si l'on suppose que cette durée de vie ne dépend pas du temps pendant lequel l'appareil a déjà fonctionné (on dit que la durée de vie est sans vieillissement), on démontre que la loi de probabilité de X admet une densité f de la forme $f(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}$ avec $\lambda>0$ et x positif.
On suppose que la durée de vie d'un appareil est sans vieillissement (ou mémoire) : la probabilité qu'il fonctionne encore au moins t_1 heures ne dépend que de t_1 et pas du temps t_0 durant lequel il a déjà fonctionné.

1. Montrer que la durée de vie d'un appareil est sans vieillissement si et seulement si sa loi de probabilité vérifie : $P(X\geqslant t_0+t_1)=P(X\geqslant t_0)\times P(X\geqslant t_1)$.
2. Soit R la fontion définie sur $\mathbb{R}^+$ par $R(x)=P(X\geqslant x)$.
   a. Calculer $R(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}R(x)$.
   b. Justifier : Pour tout réel positif x, on a $R(x)=1-\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

c. En déduire que R est dérivable et calculer R'.

d. Justifier : $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $R(a+b) = R(a) \times R(b)$.

e. En déduire qu'il existe un réel α tel que pour tout réel x positif, $R(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

f. Montrer que $\alpha < 0$. On pose alors $\lambda = -\alpha$. En déduire l'expression de $f(x)$ pour x positif.

DÉFINITION 2
Soit λ un réel strictement positif. La loi de probabilité qui admet pour fonction de densité la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, est appelée loi exponentielle de paramètre λ.

✭ EXERCICE 20

Montrer que si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle alors X suit la loi de durée de vie sans vieillissement.

Montrer que $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

Remarque :

– On a alors $P(X \in [a;b]) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.

– $\displaystyle\int_{[0;+\infty[\, \mathrm{d}f(t)} t = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriétés :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{et}\, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Preuve :Le calcul de l'espérance se ramène au calcul de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. ■

✭ EXERCICE 21

La durée de vie en semaines, d'un composant électronique est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,002. Déterminer la probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure à 100 semaines.

Solution de l'exercice 21:

$1 - \mathrm{e}^{-0{,}002 \times 100}$.

✭ EXERCICE 22

La durée d'une communication téléphonique (en minutes) suit une loi exponentielle de paramètre 0,8.

1. Calculer la probabilité pour qu'une communication dure entre 3 minutes et 5 minutes.

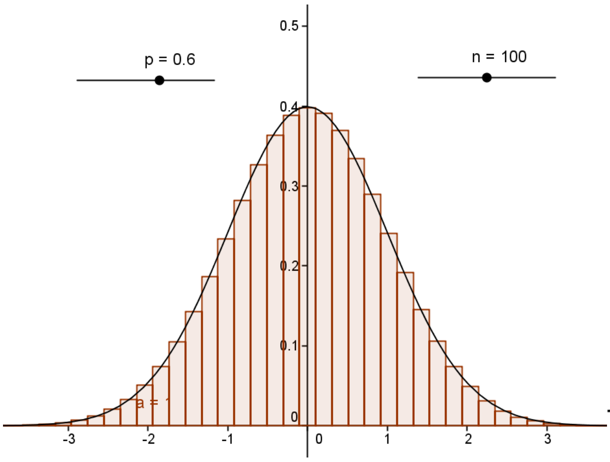
2. Calculer la probabilité pour qu'une communication dure plus de 4 minutes.

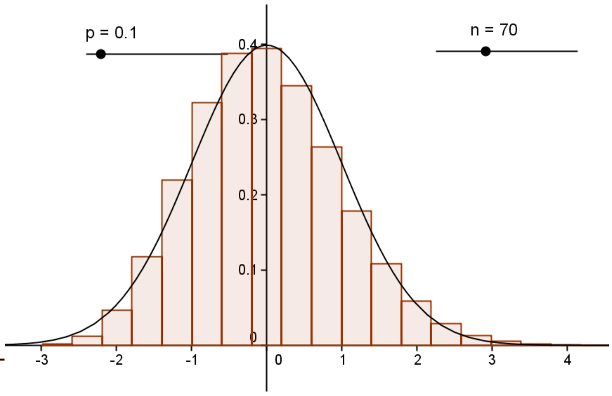
Solution de l'exercice 22:

$\mathrm{e}^{-2{,}4} - \mathrm{e}^{-4}$ et $\mathrm{e}^{-3{,}2}$

8.d) Théorème de Moivre-Laplace

Soient X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Alors, on sait que $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
On considère $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Observons les histogrammes ci-dessous :





Les dessins précédents nous suggèrent de faire une approximation de la loi binomiale par une loi continue.

THÉORÈME 2
On considère une suite de variables aléatoires (X_n) qui suivent une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, pour tous nombres réels a et b, $a \leqslant b$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

8.e) Loi normale

DÉFINITION 3
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$ si sa fonction de densité est :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ainsi pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$.

Propriétés

Si X suit la loi $\mathscr{N}(0,1)$, alors l'espérance de X est 0 et son écart-type est 1.

Preuve : $E(X) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^0 t f(t) \,\mathrm{d}t + \lim_{y \to +\infty} \int_0^y t f(t) \,\mathrm{d}t$: terminer le calcul.
L'écart-type est admis.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$, alors :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x 1$
2. Pour tout nombre réel a, $P(X \leqslant -a) = 1 - P(X \leqslant a)$.

THÉORÈME 3
X désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$, alors, pour tout nombre réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Preuve :
D'après la symétrie de la courbe représentative de f, $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x = 2F(u)$, où F désigne la primitive de f qui s'annule en 0.

Or F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{2}$ (interprétation géométrique).
Ainsi pour tout réel $1-\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $2F(u_\alpha) = 1-\alpha$. ■
Deux valeurs sont à connaître :

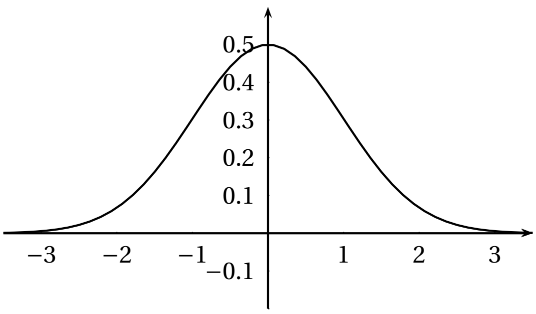
$u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$
Autrement dit $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$ et $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,9$.

Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
La fonction de densité est $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (hors programme)

Ainsi Si X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors on a vu que pour n assez grand $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit la loi $\&(01,1)$. On en déduit que $\dfrac{X_n}{n}$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$.

THÉORÈME 4
La loi de Laplace-Gauss a les propriétés suivantes :

- Moyenne : μ.
- Ecart-type : σ.
- Si $X \hookrightarrow (\mu,\sigma^2)$ alors : $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ (« Loi normale centrée réduite »)



8.f) Calculer avec la loi normale

On se ramène à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Ainsi $P(a \leqslant X \leqslant b) = P\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \leqslant U \leqslant \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$.
On utilise alors la fonction de répartition, notée Π de la loi normale centrée réduite :

$$\Pi(t) = P(U \leqslant t).$$

Ainsi,

$$P(\alpha \leqslant U \leqslant \beta) = \Pi(\beta) - \Pi(\alpha).$$

✰ EXERCICE 23 On suppose que $X \hookrightarrow \&(2;0,1)$. Calculer $P(1,7 \leqslant X \leqslant 2,3)$.
Solution de l'exercice 23:

$P(1,7 \leqslant X \leqslant 2,3) = \ldots P(-3 \leqslant U \leqslant 3) = \Pi(3) - \Pi(-3) = 2\Pi(3) - 1 = 2 \times 0,9986 - 1$. ■
Remarque : Les calculatrices ne fournissent pas $P(X \leqslant x)$ mais $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

Ainsi si $x \geqslant \mu$, alors $P(X \leqslant x) = 0,5 + P(\mu \leqslant X \leqslant x)$.
Si $x \leqslant \mu$, alors $P(X \leqslant x) = 0,5 - P(x \leqslant X \leqslant \mu)$.

Intégrale $\Pi(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.

$$\Pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table pour les grandes valeurs de x :

3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999997	

☆ EXERCICE 24 Déterminer une valeur approchée de $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$, puis de $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$ et pour finir de $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$.

Solution de l'exercice 24:

On a $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) p(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = 2\times\Pi(1)-1 \approx 0,6828$.
De même, $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) = 2\Pi(2)-1 \approx 0,9544$.
Pour finir, $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0,9973$.

8.g) Intervalles de fluctuation

DÉFINITION 4
Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, et $0<\alpha<1$, on appelle intervalle de fluctuation de X au seuil de $1-\alpha$, tout intervalle $[a;b]$, tel que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$.

THÉORÈME 5 (DÉMONSTRATION AU PROGRAMME)
Si la variable aléatoire suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha,$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Preuve :
Il suffit de remarquer que si X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $Z_n = \dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{\frac{X_n}{n}-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}$ est telle que

$\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.
Pour terminer, il suffit de remarquer que $-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha \Leftrightarrow p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, alors $IF = \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$, est l'intervalle de fluctuation asymptotique de $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ au seuil de $1-\alpha$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

8.h) Intervalles de confiance

http://www.math-info.univ-paris5.fr/smel/cours/mp/node21.html
L'idée de l'estimation par intervalle de confiance est de définir, autour de la moyenne empirique, un intervalle aléatoire (dépendant des n expériences) qui contienne μ avec une forte probabilité. C'est l'amplitude de cet intervalle qui mesure la précision de l'estimation.

DÉFINITION 5
Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est la réalisation à partir d'un échantillon d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$.

Cet intervalle aléatoire est déterminé à partir de la variable aléatoire $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ qui à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.

.
le cas où $1-\alpha = 0,95$ est le seul à connaître.

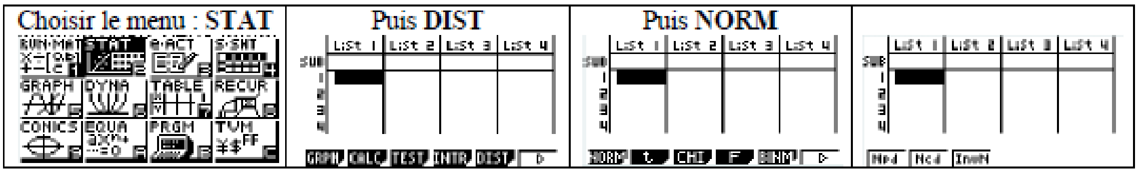
Un intervalle de confiance étant un intervalle numérique, il est incorrect de conclure la détermination d'un intervalle de confiance par une phrase du type « p a une probabilité de 0,95 d'être entre $f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ » car il n'y a plus d'aléatoire à ce stade. Il est en revanche convenable d'écrire :
« L'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}};f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de la proportion inconnue p au niveau de confiance 0,95 ».

Dans d'autres disciplines, on utilise l'intervalle $\left[f-1,96\dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}};f+1,96\dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$.

8.i) Loi normale et calculatrice

http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/lycee2010/calculatrices/loi_normale_et_calculatrice.pdf Equipe académique Bordeaux

Casio Graph 35+ et modèles supérieurs

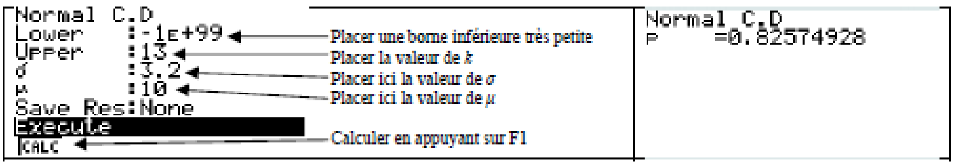


Remarque

Npd permet d'obtenir les valeurs prises par la fonction de densité.

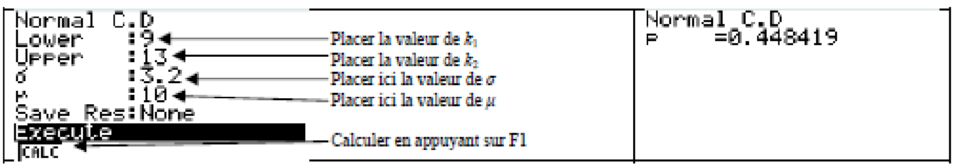
Calcul de $P(X \leq k)$: choisir Ncd

Pour calculer $P(X \leq 13)$



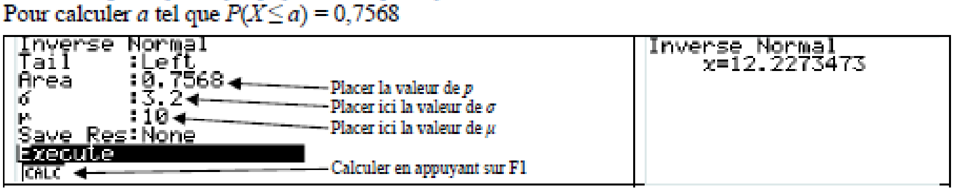
Calcul de $P(k_1 \leq X \leq k_2)$: choisir Ncd

Pour calculer $P(9 \leq X \leq 13)$



Calcul de a tel que $P(X \leq a) = p$ (avec $0 \leq p \leq 1$) : choisir InvN

Pour calculer a tel que $P(X \leq a) = 0,7568$



TI 82 Stats Fr et modèles supérieurs

Obtenir le menu des distributions des lois de probabilités par : **2nd** ➔ **DISTR** (ou distrib)	

Remarque

Normalpdf ou **normalFdp** (version fr) permet d'obtenir les valeurs prises par la fonction de densité.

Calcul de $P(X \leq k)$

Pour calculer $P(X \leq 13)$

Choisir DISTR	Choisir **normalcdf** ou **normalFrép** (version fr)	Compléter les paramètres :
DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(4:invT(5:tpdf(6:tcdf(7↓χ²pdf(	DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(4:invT(5:tpdf(6:tcdf(7↓χ²pdf(	valeur de k ; valeur de μ ; valeur de σ ; borne inférieure très petite normalcdf(-1ᴇ^(99),13,10,3.2) Après exécution on obtient : normalcdf(-1ᴇ^(99),13,10,3.2) .8257493074

Calcul de $P(k_1 \leq X \leq k_2)$

Pour calculer $P(9 \leq X \leq 13)$

Choisir DISTR	Choisir **normalcdf** ou **normalFrép** (version fr)	Compléter les paramètres :
DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(4:invT(5:tpdf(6:tcdf(7↓χ²pdf(	DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(4:invT(5:tpdf(6:tcdf(7↓χ²pdf(	valeur de μ ; valeur de σ ; valeur de k_1 ; valeur de k_2 normalcdf(9,13,10,3.2) Après exécution on obtient : normalcdf(9,13,10,3.2) .4484189611

Calcul de a tel que $P(X \leq a) = p$ (avec $0 \leq p \leq 1$)

Pour calculer a tel que $P(X \leq a) = 0,7568$

Choisir DISTR	Choisir **invNorm** ou **FracNormale** (version fr)	Compléter les paramètres :
DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(4:invT(5:tpdf(6:tcdf(7↓χ²pdf(	DISTR DRAW 1:normalpdf(2:normalcdf(3:invNorm(4:invT(5:tpdf(6:tcdf(7↓χ²pdf(	valeur de μ ; valeur de σ ; valeur de p invNorm(0.7568,10,3.2) Après exécution on obtient : invNorm(0.7568,10,3.2) 12.22734732

8.j) Intervalle de fluctuation

En classe de seconde

☆ EXERCICE 25

Les données statistiques suivantes ont été relevées :

– en 2000, dans le village de Xicun, en Chine, il est né 20 enfants, parmi lesquels 16 garçons ;

– dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au Canada à proximité d'industries chimiques, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons.

Ces observations sont-elles le fruit du hasard ?
<u>Solution de l'exercice 25:</u>

on utilise l'intervalle de confiance au seuil de 5% pour conclure : $I=\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}};p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Pour la Chine : $p=0,5; n=20$ et $f=\dfrac{16}{20}$.

Pour le Canada : $p=0,5; n=132$ et $f=\dfrac{46}{132}$.

En classe de première

✮ EXERCICE 26
Les services obstétriques d'une ville de province annoncent que sur 200 naissances, on a pu comptabiliser 116 garçons. On souhaite savoir à partir de quelles fréquences on pourra mettre en doute, au seuil de 5%, cette affirmation.

1. On fait l'hypothèse que l'on a bien 58% de chances d'accueillir un garçon. Par ailleurs, on suppose que la population de la ville est suffisamment grande pour considérer que les 200 naissances sont indépendantes les unes des autres. Montrer que dans ces conditions, la variable aléatoire X, correspondant au nombre de garçons, suit la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0,58$.
2. A l'aide d'un tableur, établir la loi de probabilité de X ainsi que la table des probabilités cumulées $P(X\leqslant k)$.
   a. Déterminer les nombres a et b tels que :
      – a est le plus petit entier naturel tel que $P(X\leqslant a)>0,025$;
      – b est le plus petit entier naturel tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0,975$.
   b. Comparer l'intervalle de fluctuation à 95% $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$ obtenu grâce à la loi binomiale avec l'intervalle $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}};p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   Essayer d'expliquer.
3. En réalité, on a comptabilisé, sur 200 naissances, 126 garçons. Peut-on accepter, au seuil de 5%, notre hypothèse de départ ?

utilisation sur tableur de LOI.BINOMIALE(k ;n ;p) et
pour le cumul LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;VRAI) ou
CRITERE.LOI.BINOMIALE(n ;p ;alpha)
simulation à l'aide d'un algorithme
Calculatrice TI : menu DISTR (touches 2nde puis VAR)

– *binompdf*(n,p,k) *renvoie la probabilité* $P(X=k)$ *en suivant la loi binomiale de paramètres n et p.*

– *binomcdf*(n,p,k) *renvoie la probabilité* $P(X\leqslant k)$ *en suivant la loi binomiale de paramètres n et p.*

<u>Solution de l'exercice 26:</u>

1. On répète $n=200$ fois et de manière indépendante l'épreuve « avoir un enfant » avec une probabilité $p=0,58$ d'avoir un garçon.
2. À l'aide du tableur, on obtient $a=102$et $b=130$.

   Ainsi l'intervalle de fluctuation à 95% est $J=\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$ obtenu grâce à la loi binomiale est $[0,51;0,65]$.

   $I=\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}};p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est $[0,509;0,651]$.
3. La fréquence observée $f=\dfrac{126}{200}=0,63$ appartient à J : au seuil de 5% d'erreur, on peut accepter l'hypothèse de départ, à savoir $p=0,58$.

En classe de terminale : loi normale

✯ EXERCICE 27
Les services obstétriques d'une ville de province annoncent que sur 200 naissances, on a pu comptabiliser 116 garçons. On souhaite savoir à partir de quelles fréquences on pourra mettre en doute, au seuil de 5%, cette affirmation.

$\boxed{1.}$ On fait l'hypothèse que le nombre de naissances suit une loi normale de moyenne $\mu = 116$ et d'écart-type σ tel que $\sigma^2 = 48,72$. Vérifier que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$\boxed{2.}$ À l'aide d'un tableur, établir les probabilités $P(X \leqslant k)$ pour $k \in [0;200]$.

$\boxed{3.}$ Déterminer les nombres A et B tels que :

- A est le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant A) > 0,025$;
- B est le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant B) \geqslant 0,975$.

$\boxed{4.}$ Comparer l'intervalle de fluctuation à 95% , $\left[\dfrac{A}{n};\dfrac{B}{n}\right]$ ainsi obtenu avec celui obtenu avec la loi binomiale $\left[\dfrac{a}{n};\dfrac{b}{n}\right]$ et avec l'intervalle $\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}};p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Essayer d'expliquer.

$\boxed{5.}$ a. en réalité, on a comptabilisé sur 200 naissances, 126 garçons. Peut-on accepter, au seuil de 5%, notre hypothèse de départ ?

b. On souhaite calculer, grace à la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation obtenu en 2.b).

i. Vérifier que, pour tout nombre k, $P(X \leqslant k) = P\left(Z \leqslant \dfrac{k-\mu}{\sigma}\right)$.

ii. Vérifier que $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = 0,95$.

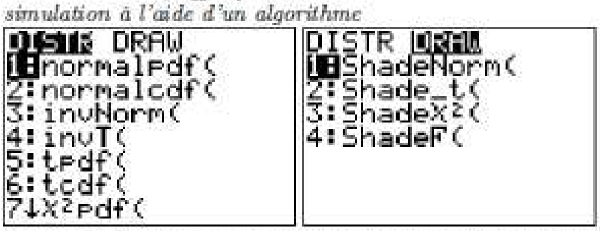
iii. En déduire que $P(-1,96\sigma + \mu \leqslant X \leqslant 1,96\sigma + \mu) = 0,95$.

iv. Calculer $-1,96\sigma + \mu$ et $1,96\sigma + \mu$. Comparer ces valeurs avec A et B.

c. Quels résultats obtiendrait-on, pour accepter au seuil de 1% cette fois-ci les valeurs annoncées par ces mêmes services obstétriques ?

Utilisation sur tableur de LOI.NORMALE($x;\mu;\sigma;VRAI$) qui donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(t-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dt$. Attention à bien préciser la valeur cumulative sur VRAI. Sur FAUX, elle renvoie la valeur de la fonction de densité en x.

Utilisation sur tableur de LOI.NORMALE.INVERSE($valeurproba;\mu;\sigma$) qui donne la valeur de x pour laquelle $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(t-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dt = valeurproba$.
simulation à l'aide d'un algorithme



Sur la calculatrice TI, menu $DISTR$ (touches $2ND$ puis $VARS$) :

- $normalpdf(a,\mu,\sigma)$ renvoie la valeur de la densité de probabilité en a de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$;
- $normalcdf(a,b,\mu,\sigma)$ renvoie la probabilité $P(a \leq X \leq b)$ en suivant la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ (prendre $a = -1E99$ pour obtenir $P(x \leq b)$) ;
- $InvNorm(p,\mu,\sigma)$ renvoie la valeur k pour laquelle $P(X \leq k) = p$ en suivant la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$;
- $ShadeNorm(a,b,\mu,\sigma)$ dessine la surface correspondant à $P(a \leq X \leq b)$ en suivant la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

Solution de l'exercice 27:

$\boxed{1.}$ Z a pour moyenne0 et écart-type 1 : elle suit la loi normale centrée réduite.
Notons que $\mu = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$.

2. Tableur : utilisation de $\boxed{\text{LOI.NORMALE(x;}\mu,\sigma\text{;VRAI)}}$.

   Remarque $\boxed{\text{LOI.NORMALE.INVERSE(valeur proba;}\mu;\sigma)}$ qui donne la valur de x pour laquelle $\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-(t-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{d}t$ = valeur proba.

   On obtient $A = 103$ et $B = 130$; ainsi $K = \left[\frac{A}{n};\frac{B}{n}\right] = [0,515;0,65]$.

3. La fréquence observée $f = \frac{126}{200}$ appartient à K : au seuil de 5% d'erreur, on peut accepter l'hypothèse de départ, à savoir $p = 0,58$.
4. Pour la loi normale centrée réduite, on a $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = 0,95$.
5. Pour la loi normale centrée réduite, on a $P(-2,58 \leqslant Z \leqslant 2,58) = 0,99$. L'intervalle de fluctuation à 1% est $L = \left[\frac{-2,58\sigma+\mu}{n};\frac{2,58\sigma+\mu}{n}\right]$.

En classe de terminale : loi binomiale et intervalle d fluctuation

Les services obstétriques d'une ville de province annoncent que sur 200 naissances, on a pu comptabiliser 116 garçons. On souhaite savoir à partir de quelles fréquences on pourra mettre en doute, au seuil de 5%, cette affirmation.

1. On fait l'hypothèse que l'on a bien 58% de chances d'accueillir un garçon. Par ailleurs, on suppose que la population de la ville est suffisamment grande pour considérer que les 200 naissances sont indépendantes les unes des autres. Montrer que dans ces conditions, la variable aléatoire X, correspondant au nombre de garçons, suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,58$.
2. Préciser la moyenne μ et l'écart-type σ de X.

   On considère que la population est suffisamment importante pour que les résultats de cette loi binomiale soient « proches » de ceux de la loi normale de paramètres μ et σ^2.
3. Vérifier que dans ces conditions, la variable aléatoire $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit la loi normale centrée réduite.
4. Vérifier que $P(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = 0,95$.
5. En déduire que $P(-1,96\sqrt{np(1-p)}+np \leqslant X \leqslant -1,96\sqrt{np(1-p)}+np) = 0,95$.
6. Si l'on désigne par F_n la variable aléatoire donnant la fréquence $\frac{X}{n}$, vérifier alors que $F_n \in \left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité de 0,95.
7. En étudiant les vriations de la fonction $t \longmapsto 1,96\sqrt{t(1-t)}$ sur l'intervalle $[0;1]$ montrer que :

$$\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

8. Conclusions ?

8.k) Exercices divers

☆ EXERCICE 28

Un laboratoire amis au point un alcootest et décide d'en vérifier la crédibilité. Les résultats obtenus sont les suivants :

– 2% des personnes contrôlées par la police sont effectivement en état d'ébriété ;
– 95 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété ;
– 5 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. Quelle est la probabilité pour que l'alcootest donne
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement en état d'ébriété sachant que l'alcootest était positif ?

Solution de l'exercice 28:

On s'aide d'un arbre :

– $P(I) = 0,02$: les personnes contrôlées par la police sont en état d'ébriété ;

– $P_I(A) = 0,95$: l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété ;

– $P_{\overline{I}}(A) = 0,05$: l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

$\boxed{1.}$ $P(A \cap I) = 0,02 \times 0,95$.

$\boxed{2.}$ $P-A(I) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(A)}$.

✭ EXERCICE 29

Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a;b]$, quelle loi suit la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$.
On pourra observer la simulation effectuée ci-dessous pour $a = 3$ et $b = 7$.

C2 | f_x =(B2-3)/(7-3)

	A	B	C	D
1	a=3	X	Y	
2	b=7	5,16664187	0,54166047	
3		4,95450005	0,48862501	
4		6,99027268	0,99756817	
5		4,31328884	0,32832221	
6		5,65500493	0,66375123	
7		6,64868699	0,91217175	
8		5,60026005	0,65006501	
9		4,9992127	0,49980318	
10		6,11324393	0,77831098	
11		3,01396567	0,00349142	
12		5,00214636	0,50053659	
13		6,92474156	0,98118539	
14		4,73218037	0,43304509	
15		3,58876586	0,14719146	
16		6,11477113	0,77869278	
17		6,01260877	0,75315219	
18		6,6760385	0,91900963	
19		6,21941993	0,80485498	
20		5,76844142	0,69211035	
21		4,70849189	0,42712297	
22		6,94415571	0,98603893	
23		3,39851748	0,09962937	
24		5,68549605	0,67137401	
25		6,10200944	0,77550236	
26		4,68005871	0,42001468	
27		3,70186076	0,17546519	
28		4,81978951	0,45494738	
29		3,99806816	0,24951704	

Solution de l'exercice 29:

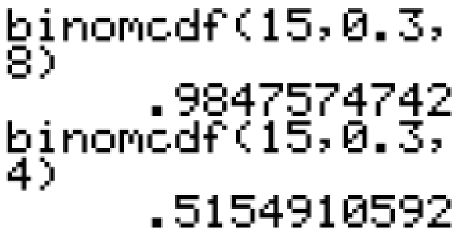
Y suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

✰ EXERCICE 30

On suppose qu'il y a une probabilité de 0,3 d'être contrôlé lorsque l'on prend le métro. Henri prend le métro 15 fois par an.

1. Avec la calculatrice (une capture d'écran est donnée ci-dessous), quelle est la probabilité pour que Henri soit contrôlé entre 5 et 8 fois dans l'année ?

Graph 85 :



Graph 35+ :

2. Malheureusement, Henri fraude : il ne paie jamais son ticket ! Sachant que le prix d'un ticket est de 1,50 euros et qu'une amende coûte 20 euros, quelle est la probabilité pour Henri que le prix total des amendes payées soit supérieur à ce qu'il aurait dépensé en ne fraudant pas ?

Solution de l'exercice 30:

1. Si N désigne le nombre de contrôles dans une année, N suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,3$ et $n = 15$.

$$P(5 \leqslant N \leqslant 8) = p(N \leqslant 8) - P(N \leqslant 4) \approx 0,9842 - 0,5155.$$

2. Henri va économiser $1,50 \times 15 = 22,50$ € : il faut au moins deux amendes. La probabilité cherchée est donc $P(N \leqslant 2) = 1 - P(N \leqslant 1) \approx 0,9647$.

✰ EXERCICE 31

Le temps d'attente à un guichet suit une variable aléatoire continue T , exprimée en heures,de loi exponentielle de paramètre 0,5.

1. Quel est le temps d'attente moyen ?
2. Calculer $P(T < 0,25), P(T > 2), P(T > 0,75)$ et $P(0,2 < T < 1,5)$ (on arrondira à 10^{-3} près).
3. Sachant qu'un client a déjà attendu 45 minutes, quelle est la probabilité qu'il attende moins de 2h en tout ?
4. Six guichets sont ouverts. Soit X le nombre de ces guichets pour lesquels le temps d'attente est inférieur à 30 minutes. On suppose le temps d'attente à un guichet indépendant du temps d'attente aux autres guichets.
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b. Calculer la probabilité pour que, à aumoins l'un de ces guichets, le temps d'attente soit inférieur à 30 minutes.
5. On décide d'ouvrir un guichet de plus dès que, sur les six guichets, le temps d'attente à au moins deux de ces guichets dépasse 30 minutes. Quelle est la probabilité d'ouverture de ce septième guichet ?

Solution de l'exercice 31:

1. L'espérance est $\dfrac{1}{\lambda} = 2$, soit 2 heures d'attente en moyenne.
2. $P(T < 0,25) \approx 0,118$; $P(T > 2) \approx 0,368$: $P(T > 0,75) \approx 0,687$; $P(0,2 < T < 1,5) \approx 0,432)$.
3. On cherche $P_{T \geqslant 0,75}(T \leqslant 2) = P(0 \leqslant T \leqslant 1,25)$.
4. a. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = P(T \leqslant 0,5) \approx 0,221$.
   b. $1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,779^6$.

✮ Exercice 32
La distribution des notes obtenues à un concours suit une loi normale de moyenne 11 et d'écart-type 3. On sait que 30% des candidats n'ont pas été admissibles.
Quelle est la barre d'admissibilité ? (on pourra s'aider de la table de loi normale)

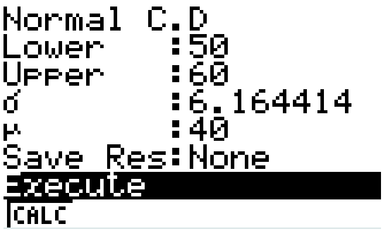
Solution de l'exercice 32:

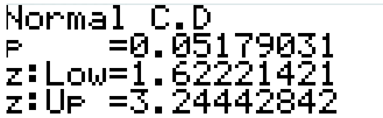
Si X désigne la note obtenue au concours, $Z = \dfrac{X-11}{3}$ suit la loi normale centrée réduite.

Or, $\boxed{\text{InvNorm}(0.3) \approx -0.5244}$, donc la barre était à $11 + 3 \times (-0.5244) = 9,4268$.

✮ Exercice 33
On suppose qu'il y a une probabilité de 0,05 d'être contrôlé lorsque l'on prend le métro. Henri prend le métro 800 fois par an.

1. Quelle est la probabilité pour que Henri soit contrôlé entre 50 et 60 fois dans l'année ? On pourra s'aider de la capture d'écran ci-dessous, en l'expliquant.





2. Malheureusement, Henri fraude : il ne paie jamais son ticket ! Sachant que le prix d'un ticket est de 1,50 euros et qu'une amende coûte 20 euros, quelle est la probabilité pour Henri que le prix total des amendes payées soit supérieur à ce qu'il aurait dépensé en ne fraudant pas ?

Solution de l'exercice 33:

1. Si N désigne le nombre de contrôles dans une année, N suit la loi binomiale de parametres $p = 0,05$ et $n = 800$, que l'on peut approcher par la loi normale de moyenne $\mu = np = 800 \times 0,05 = 40$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{38}$.
   $P(50 \leqslant N \leqslant 60) \approx 0,0518$.
2. Henri va économiser $1,5 \times 800 = 1200$€ : il faut au moins soixante amendes.
   La probabilité cherchée est donc $P(N \geqslant 60) = 1 - P(N \leqslant 60) \approx 1 - 0,99941$.

✮ Exercice 34
La masse des sacs de grains de blé produits par une coopérative agricole suit une loi normale, de moyenne 50 kg et d'écart-type inconnu. 95% des sacs ont un poids compris entre 48 et 52 kg.

1. Quel est l'écart-type ?
2. On constitue des lots de 40 sacs, pris au hasard dans la production. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le poids moyen de ces 40 sacs.
   a. Quelle est la loi suivie par X ?
   b. Donner $P(X < 49,5)$.

Solution de l'exercice 34:

1. On sait que $P(48 \leqslant X \leqslant 52) = 0,95$ et $P(-1,96\sigma + \mu \leqslant X \leqslant 1,96\sigma + \mu) = 0,95$.
   Alors $\sigma = \dfrac{2}{1,96} \approx 1,02$.
2. $X = \dfrac{\sum N_i}{40}$, suit une loi normale de moyenne $\dfrac{\sum m_1}{40} = 50$ et d'écart-type $\dfrac{\sum \sigma_i}{40} \approx 1,02$.

8.l) Exercices sur la loi normale

✯ EXERCICE 35
On a étudié le taux de glycémie d'une population d'individus présentant certaines caractéristiques précises ; on a obtenu les résultats suivants : des glycémies sont inférieures à g/L et des glycémies sont supérieures à g/L. Si on suppose que la glycémie des individus présentant ces caractéristiques suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart-type de cette loi.
Solution de l'exercice 35:

Soit X la glycémie d'un indivisu tiré au hasard dans la population étudiée. X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
$P(X < 0,82) = 0,20 = \Pi\left(\dfrac{0,82-m}{\sigma}\right)$, d'où $\dfrac{0,82-m}{\sigma} = -0,8416$ (utiliser $InvNorm(0,2)$.
De même $P(X > 0,98) = 0,30 = 1 - \Pi\left(\dfrac{0,98-m}{\sigma}\right)$, d'où $\dfrac{0,98-m}{\sigma} = 0,5244$
On trouve : $m \approx 0,9156$ et $\sigma \approx 0,1171$.

✯ EXERCICE 36
Une usine utilise une machine automatique pour remplir des flacons contenant un certain produit en poudre. Par suite de variations aléatoires dans le mécanisme, la masse de poudre par flacon est une variable aléatoire de loi normale de moyenne et décart-type 1,1 mg. Les flacons sont vendus comme contenant 100 mg de produit.

1. La machine est réglée sur $m = 101,2$ mg. Quelle est la probabilité que la masse de produit dans un flacon soit inférieure à la masse annoncée ?
2. Sur quelle valeur de faut-il régler la machine pour qu'au plus 4% des flacons aient une masse inférieure à la masse annoncée ?

Solution de l'exercice 36:

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}(101,2; 1,1^2)$.
   $P(X < 100) = \Pi\left(\dfrac{100-101,2}{1,1}\right) = \Pi(-1,09) = 1 - \Pi(1,09) = 0,1379$.
2. X suit la loi normale $\mathcal{N}(m; 1,1^2)$.
   $P(X < 100) \leqslant 0,04$, soit $\Pi\left(\dfrac{m-100}{1,1}\right) \leqslant \Pi(-1,7507)$.
   Il suffit que $m \geqslant 101,926$.

✯ EXERCICE 37
On admet que la longueur du pied d'un homme adulte suit une loi normale de moyenne 24 cm et d'écart-type 3 cm. Un fabricant de chaussettes étudie cette loi pour programmer sa production de chaussettes en taille et en quantité. Il décide de répartir sa production selon cinq tailles numérotées de 1 à 5 de la façon suivante : il prend un intervalle symétrique autour de la moyenne, de probabilité 0,90 ; il divise cet intervalle en trois intervalles de même amplitude correspondant aux tailles 2, 3 et 4. Il obtient donc ainsi ses cinq tailles.

1. Déterminer les longueurs de pied qui délimitent ces cinq intervalles.
2. Quelle est la part en pourcentage de la production totale à affecter respectivement à chacune des cinq tailles ?

Solution de l'exercice 37:

1. X suit la loi $\mathcal{N}(24; 3^2)$; on cherche a tel que $P(24 - a < X < 24 + a) = 0,90$.
   On a $2\Pi\left(\dfrac{a}{3}\right) - 1 = 0,90$, d'où $\dfrac{a}{3} \approx 1,6449$.
   Tailles entre (environ) $24 - 1,65 \times 3$ et $24 + 1,65 \times 3$.
   D'où Taille 1 : inférieure à 19,05 cm, Taille 2 : entre 19,05 et 22,35,...
2. Pour la taille 3 : $P\left(24 - \dfrac{a}{3} < X < 24 + \frac{a}{3}\right) = P\left(-\dfrac{a}{9} < T < \dfrac{a}{9}\right)$ (où $T = \dfrac{X-24}{3}$).
   D'où, $P\left(-\dfrac{a}{9} < T < \dfrac{a}{9}\right) = 2\Pi\left(\dfrac{a}{9}\right) - 1 \approx 0,416$.

✯ EXERCICE 38

On note p la proportion des individus d'une population atteints d'une maladie M. On extrait par tirage au sort un échantillon de 100 individus de la population. On constate que sur ces 100 individus, sont 15 atteints de la maladie M.

1. Donner un intervalle de confiance pour au seuil0,01.

2. Avec cette observation, à quel seuil faudrait-il travailler pour obtenir un intervalle de confiance pour de longueur ?

Solution de l'exercice 38:

$I_{0,01}(p) = \left[0,15-2,58\sqrt{\dfrac{0,15(1-0,15)}{100}};0,15+2,58\sqrt{\dfrac{0,15(1-0,15)}{100}}\right]$, soit (environ) $[0,06;0,24]$.

$\alpha \approx 0,16$.

9. stats, probas et algo

9.a) Pièce truquée ?

> On lance 144 fois une pièce de monnaie.
> on veut déterminer, avec une marge d'erreur de t% si cette pièce est équilibrée ou non.

☆ EXERCICE 39 (EN SECONDE)
On a obtenu 61 « face ».
Préciser l'intervalle de fluctuation au seuil de 5% et conclure.

☆ EXERCICE 40 (EN PREMIÈRE)
On considère que les lancers sont indépendants.
F désigne la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenus lors de ces 144 lancers.

1. Quelle est la loi suivie par F ?

2. Au tableur, on a déterminé la table des valeurs de $P(F \leqslant k)$, où k est un nombre entier naturel compris entre 0et 144.
   Un extrait en est donné ci-dessous :

	A	B
1	k	P(F≤k)
2	0	4,48416E-44
3	1	6,50202E-42
4	2	4,68191E-40
5	...	...
6	66	0,179682202
7	67	0,22668585
8	68	0,279910569
9	69	0,338534897
10	...	...
11	81	0,943484518
12	82	0,960121465
13	83	0,972549064
14	84	0,981573868
15	85	0,987944318
16	86	0,992314743
17	87	0,995228359
18	88	0,997115588
19	...	...

=loi.binomiale(A2;144;0,5;vrai)

   a. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(F \leqslant a) > 0,025$.

   b. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(F \leqslant b) \geqslant 0,975$.

   c. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non, au seuil de 5% l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée.

3. En réalité, en lançant 144 fois la pièce, on a obtenu 61 fois « face ». Quelles sont vos conclusions ?

☆ EXERCICE 41 (EN TERMINALE)

Proposition 1 :

On admet cette fois que F suit une loi normale de moyenne $\mu = 72$ (car $np = 144 \times 0,5 = 72$) et de variance $\sigma^2 = 36$ (car $\sigma^2 = 144 \times 0,5 \times (1-0,5)$.

1. Au tableur, on a déterminé la table des valeurs $P(F \leqslant k)$ où k est un nombre entier naturel compris entre 0 et 144. Un extrait en est donné ci-dessous :

k	P(F≤k)
0	1,77648E-33
1	1,31253E-32
2	9,43359E-32
...	...
56	0,003830381
57	0,006209665
58	0,009815329
59	0,01513014
...	...
81	0,933192799
82	0,952209648
83	0,966623492
84	0,977249868
85	0,98486986
86	0,990184671
87	0,993790335
88	0,996169619
...	...

=loi.normale(A2;72;racine(36);vrai)

a. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(F \leqslant a) > 0,005$.

b. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(F \leqslant b) \geqslant 0,995$.

c. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non, au seuil de 1% l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée.

2. En réalité, en lançant 144 fois la pièce, on a obtenu 61 fois « face ». Quelles sont vos conclusions ?

Proposition 2 :

On admet cette fois que F suit une loi normale de moyenne $\mu = 72$ et de variance $\sigma^2 = 36$.

1. Avec votre calculatrice :

a. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(F \leqslant a) > 0,005$.

b. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(F \leqslant b) \geqslant 0,995$.

c. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non, au seuil de 1% l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée.

2. En réalité, en lançant 144 fois la pièce, on a obtenu 61 fois « face ». Quelles sont vos conclusions ?

Proposition 3 :

On admet cette fois que F suit une loi normale de moyenne $\mu = 72$ et de variance $\sigma^2 = 36$.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire R définie par $R = \dfrac{F-72}{6}$ suit la loi normale centrée réduite.

2. au tableur, on a déterminé la table des valeurs $P(R \leqslant k)$, où k est un nombre entier compris entre -12 et 12.

Un extrait en est donné ci-dessous :

k	P(F≤k)
-12	1,77648E-33
-11,8333333	1,31253E-32
...	...
-2	0,022750132
-1,83333333	0,033376508
-1,66666667	0,047790352
-1,5	0,066807201
...	...
1,33333333	0,90878878
1,5	0,933192799
1,66666667	0,952209648
1,83333333	0,966623492
2	0,977249868
2,16666667	0,98486986
2,33333333	0,990184671
2,5	0,993790335

=loi.normale.standard(A2;vrai)

a. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(R \leqslant a) > 0,025$. En déduire le plus petit entier α tel que $P(F \leqslant \alpha) > 0,025$.

b. Déterminer le plus petit entier b tel que $P(F \leqslant b) \geqslant 0,975$. En déduire le plus petit entier β tel que $P(F \leqslant \beta) > 0,025$.

c. Énoncer la règle de décision permettant de rejeter ou non, au seuil de 5% l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée.

3. En réalité, en lançant 144 fois la pièce, on a obtenu 61 fois « face ». Quelles sont vos conclusions ?

10. Algorithmes

Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011
Les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ♢ dans le programme de TS.
Petit listing des points du programme signalés par un symbole avec un exemple d'algorithme en langage naturel.
(lien vers algorithme sur énoncé programme officiel)

10.a) Dans le programme de ES

Étant donné une suite (q^n) avec $0 < q < 1$, mettre en oeuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel q^n est inférieur à un réel a positif donné.	Exemple : au bout de combien d'années la population d'une ville de 10000 habitants qui diminue chaque année de 10% comportera-t-elle moins de 4000 habitants ?	`Donner q`
		`Donner a`
		`n prend la valeur 1`
		`Tant que q^n>a`
		`        n prend la valeur n+1.`
		`Fin tant que`
		`Afficher n`

10.b) Dans le programme de S

Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A		`Donner A`
		`Donner U0`
		`n prend la valeur 0`
		`Tant que Un>A`
		`        n prend la valeur n+1.`
		`Fin tant que`
		`Afficher n`

Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques sont traités en exercice. ♢ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre.	Suite de Fibonacci définie par : $U_0 = U_1 = 1$ $\forall n \geqslant 2$, $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ Étant donné un nombre positif p écrire un algorithme calculant U_n tel que $U_n > p$	Donner p i prend la valeur 2 U_0 prend la valeur 1 U_1 prend la valeur 1 Répéter U_i prend la valeur $U_0 + U_1$ U_0 prend la valeur U_1 U_1 prend la valeur U_i i prend la valeur $i+1$ jusque $(U_i \geqslant p)$ Fin répéter Afficher U_i
♢ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$.	La dichotomie On suppose qu'on dispose d'une fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$ et qui s'annule entre a et b. L'objectif est de trouver un encadrement d'amplitude maximale e (donnée) de la solution de l'équation $f(x) = 0$	Saisir a, b, e. Tant que $b - a > e$ faire $\frac{a+b}{2} \to c$ Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors $c \to b$ Sinon $c \to a$ Fin si Fin Tant que Afficher a, b.

◊ Pour une fonction monotone positive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.	Calculer l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a;b]$. On partage $[a;b]$ en n intervalles.	Som prend la valeur 0 C prend la valeur $\dfrac{b-a}{n}$ Pour k allant de 1 à n faire Som prend la valeur Som $+c\times f(a+k\times c)$ Fin Pour Afficher Som
	Un robot est placé sur la case Départ : Départ Le lancer d'une pièce bien équilibré détermine le déplacement du pion. - Pile, le robot se déplace vers la droite (on associe le réel +1) - Face, le robot se déplace vers la gauche (on associe le réel -1) - Un trajet est une succession de 4 déplacements. On veut déterminer l'événement A : « le robot est revenu à la case départ après 4 déplacements »	Saisir n G prend la valeur 0 Pour j allant de 1 à n R prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à 4 Si alea<0,5 alors R prend la valeur $R+1$ sinon R prend la valeur $R-1$ FinSi FinPour Si $R=0$ alors G prend la valeur $G+1$ FinPour Afficher $\dfrac{G}{n}$.

10.c) Programmes sur Amiens Python

Algo1 :

```
from math import *
q=input('q')
a=input('a')
n=1
while q**n>a:
    n=n+1

print 'Rang : ',n
```

Algo2 :

```
from lycee import *
# suite explicite
def u(n):
    un=exp(n)
    return(un)



A=input('nombre A')

n=0
while u(n)<A:
    n=n+1

print 'Rang : ',n
```

Algo3 :

```python
from lycee import *
u0=1
u1=1

p=input('p')
i=2

# python n a pas de until
while u0+u1<p:
    u=u0+u1
    u0=u1
    u1=u
    i=i+1
    print(i,u)
print(u0+u1)
print('rang',i+1)
```

Algo4 :

```python
from lycee import*
from random import *
# FONCTION DONT ON CHERCHE UNE RACINE
def f(x):
    fx=exp(x)-5
    return fx

# nombre derive
def derive(f,a):
    eps=0.00001
    df=(f(a+eps)-f(a))/eps
    return(df)

#Dichotomoie racine ds [a;b] ; eps=precision ; compteur = nbre de boucles
def dicho(a,b,eps):
    compteur=1
    while abs(f(a))>eps:
        c=(a+b)/2.
        if f(a)*f(c)<=0:
            b=c
        else:
            a=c
        compteur=compteur+1
    return(a,compteur)
```

```python
#version recursive
def dichorec(a,b,eps,compteur):
    c=(a+b)/2.
    if abs(f(a))>eps:
        if f(a)*f(c)<=0:
            return(dichorec(a,c,eps,compteur+1))
        else:
            return(dichorec(c,b,eps,compteur+1))
    else:
        return(c,compteur)

#Newton a=depart ; eps=precision ; compteur=nombre de boucles
def newton(a,eps):
    compteur=1
    while (abs(f(a))>eps)and(derive(f,a))!=0 :
        a=-f(a)/derive(f,a)+a+0.
        compteur=compteur+1
    return(a,compteur)
```

```
#Newton a=depart ; eps=precision ; compteur=nombre de boucles
def newtonrec(a,eps,compteur):

    if (abs(f(a))>eps) and(derive(f,a))!=0:
        return(newtonrec(-f(a)/derive(f,a)+a+0.,eps,compteur+1))
    else:
        return(a,compteur)


def montecarlo(a,b,eps,maxiter):
    compteur=1
    c=randint(a,b)
    while ( abs(f(c))>eps )and( compteur<maxiter):
        c=(b-a)*random()+a
        compteur=compteur+1
    return(c,compteur)


print 'dicho:',dicho(-1,5,0.000001)
print 'dichorec:',dichorec(-1,5,0.000001,1)
print 'newtow:',newton(3,0.00000001)
print 'newtonrec:',newtonrec(3,0.00000001,1)
print 'montecarlo:',montecarlo(-1,5,0.000001,10000000)
```

Algo5 :

```
def f(x):
fx=x**2
return(fx)
def rectanglesmin(a,b,n):
S=0.
h=(b-a)/n
for i in range(0,n):
S=S+h*f(a+h*i)
return(S)
def rectanglesmax(a,b,n):
S=0.
h=(b-a)/n+0.
for i in range(1,n+1):
S=S+h*f(a+h*i)
return(S)
def trapezes(a,b,n):
S=0.
h=(b-a)/n
for i in range(0,n):
t=0.5*h*(f(a+i*h)+f(a+(i+1)*h))
S=S+t
return(S)
print 'rectangles min:',rectanglesmin(0,1.,10000)
print 'rectangles max:',rectanglesmax(0,1.,10000)
print 'trapezes:',trapezes(0,1.,10000)
```

Algo6 :

```
• from random import *
• N=input('nombre echantillons')
• k=4
• nbre=0.
• for i in range(1,N+1):
• s=0
• for j in range(1,k+1):
• pf=randint(0,1)
• if pf==0:
• s=s+1
• if pf==1:
• s=s-1
• if s==0:
• nbre=nbre+1.
• print('frequence :'),nbre/N
```

11. Atelier algorithmique

11.a) Que font ces algorithmes ?

✯ EXERCICE 42

Saisir $f(x)$
Saisir a
m prend la valeur $f'(a)$
p prend la valeur $f(a) - am$
afficher m
Afficher p.

✯ EXERCICE 43

Saisir n, entier naturel supérieur à 2
Saisir une liste de réels $x_1, x_2, \dots, x_n$.
Pour i de 1 jusqu'à $n-1$
    j prend la valeur n
        Tant que $i < j$
            Si $x_j < x_{j-1}$ alors
                échanger x_j et x_{j-1} dans la liste
            fin si
            j prend la valeur $j-1$
        fin Tant que
Fin pour
Afficher la liste $x_1, x_2, \dots, x_n$.

✯ EXERCICE 44

$0 \to A$
$1 \to B$
$1 \to K$
Tant que $K \leqslant 5$
    $A + B \to U$
    $B \to A$
    $u \to B$
    $K + 1 \to K$
Fin Tant que
Afficher U.

11.b) Progression possible au lycée en algorithmique

✯ EXERCICE 45

Compléter le tableau an précisant les classes : seconde, première ou terminale.

	Instructions	Comprendre	Modifier	Créer
Structure d'un algorithme et instruction	Entrée Calcul ou traitement			
	Affectation			
	Sortie			
	Condition			
	Boucle « tant que »			
	Boucle « For »			
	Boucle « répéter »			

Donner des exemples d'algorithmes en terminale dans les différentes parties du programme.
Des exemples dans vos classes cette année…
Les différentes questions possibles sur les algorithmes :

- Décrire un algorithme en langage naturel ;
- Comprendre et analyser un algorithme déjà écrit ;
- Valider et modifier un algorithme ;
- Trouver une erreur dans un algorithme ;
- Réaliser un algorithme simple.

11.c) Comment évaluer un algorithme ?

Voici des énoncés et des copies d'élèves à évaluer…

☆ EXERCICE 46

Soient u et v les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 300 \times 1,5^n$ et $v_n = 310 + 20n$.
Écrire un algorithme pour déterminer à partir de quel rang n, on a $u_n > v_n$.
On ne demande pas de trouver cette valeur.


$u_n = 300 \times 1,05^n$ $v_n = 310 + 20n$

Variables : u, v, n → nombres

DEBUT

n prend la valeur 0

U prend la valeur $300 \times 1,05^n$.

V prend la valeur $310 + 20n$.

Tant que v > u

n prend la valeur n + 1.

Fin tant que.

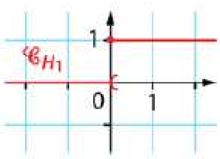
Afficher n.

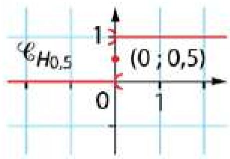
FIN

☆ EXERCICE 47

Olivier Heaviside était un ingénieur anglaistravaillant dans la télégraphie. En mathématiques, il a laissé une fonction H_1 aussi simple qu'utile, souvent appelée la « fonction marche ».

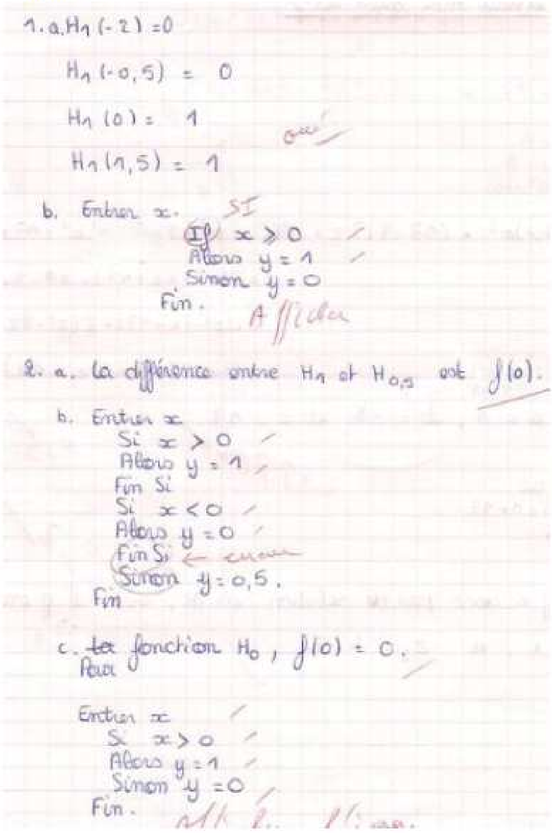
1. On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction H_1.
   a. Déterminer $H_1(-2)$; $H_1(-0,5)$; $H_1(0)$ et $H_1(1,5)$.
   b. Écrire un algorithme nommé « Heavi » qui calcule l'image d'un réel quelconque par H_1.



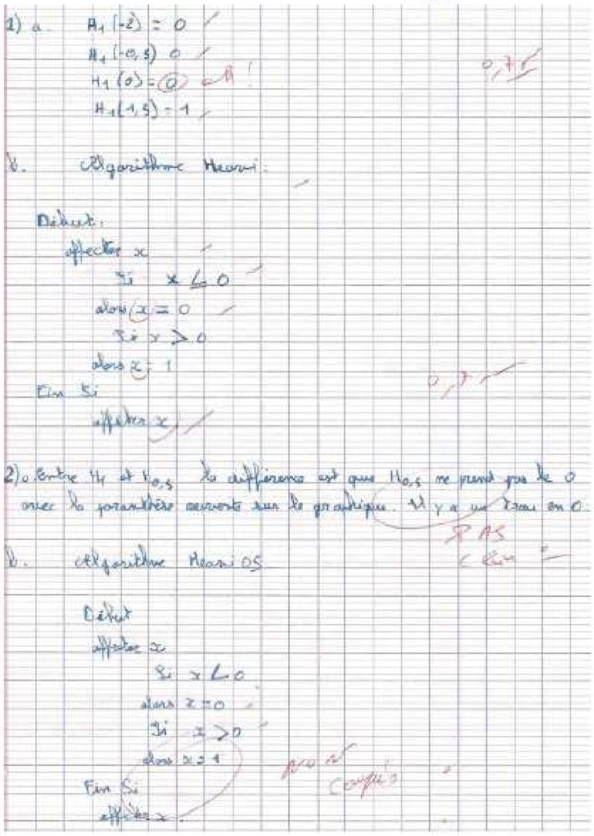


2. Pour plus de « symétrie » on utilise souvent une version modifiée de H_1 que l'on note $H_{0,5}$ et donc la représentation graphique est donnée ci-contre.
   a. quelle est la différence entre H_1 et $H_{0,5}$?
   b. Modifier l'algorithme précédent pour obtenir un algorithme nommé « Heavi05 » qui calcule l'image d'un réel quelconque par $H_{0,5}$.
   c. Si l'on conserve des notations similaires, décrire la fonction notée H_0, puis écrire un algorithme nommé « Heavi0 »

Copie 1


1. a. $H_1(-2) = 0$
$H_1(-0,5) = 0$
$H_1(0) = 1$
$H_1(1,5) = 1$
oui
b. Entrer x. SI
If x ⩾ 0
Alors y = 1
Sinon y = 0
Fin.
Afficher
2. a. La différence entre H_1 et $H_{0,5}$ est $f(0)$.
b. Entrer x
Si x > 0
Alors y = 1
Fin Si
Si x < 0
Alors y = 0
Fin Si ← erreur
Sinon y = 0,5.
Fin
c. La fonction H_0, $f(0) = 0$.
Pour
Entrer x
Si x > 0
Alors y = 1
Sinon y = 0
Fin.

copie2


1) a. $H_1(-2) = 0$
$H_1(-0,5)$ 0
$H_1(0) = 0$ ← 1 !
$H_1(1,5) = 1$
0,75
b. Algorithme Heavi :
Début
affecter x
Si x ⩽ 0
alors x = 0
Si x > 0
alors x 1
Fin Si
afficher x
0,75
2) a. Entre H_1 et $H_{0,5}$ la différence est que $H_{0,5}$ ne prend pas le 0 avec la parenthèse ouverte sur le graphique. Il y a un trou en 0.
RAS
b. Algorithme Heavi 0S
Début
affecter x
Si x ⩽ 0
alors x = 0
Si x > 0
alors x = 1
Fin Si
afficher x
non compris

11.d) Exemple de grille pour l'évaluation en algorithmique

Critère	Excellent	Bon	Moyen	Insuffisant
respect des bons usages But visé par l'algorithme est explicité, des commentaires précisent le déroulement. Les variables ont des noms bien choisis	Aucune erreur	De petits détails sont négligés. Le but est difficile à déterminer	Des détails manquent, mais le programme tente quand même d'accomplir ses fonctions essentielles	Ne répond pas au problème posé. Objectif impossible à déterminer
Correction du code L'algorithme fonctionne	Fonctionne correctement dans tous les cas	Fonctionne pour des données (entrées) standard mais échecs mineurs sur des cas particuliers	Échoue pour des données (entrées) standard mais pour une raison mineure	Échoue pour des données (entrées) standard mais pour une raison importante
Interface utilisateur (entées, sorties) Claire et commode	Aucune faute	1 à 3 fautes mineures	Plus de trois fautes mineures ou une faute majeure	Plus d'une faute majeure

11.e) Exemples au bac – en TL (spé maths)

✯ Exercice 48

✯ Exercice 49 (Métropole 2010)
Soit la suite u de terme général u_n définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.

1. Montrer que $u_1 = 2$ et que $u_2 = 6$. Calculer u_3.

2. Chacune des trois propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? (Justifier les réponses).

Proposition 1 : « La suite u est arithmétique. »

Proposition 2 : « Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $u_n = n^2 + 1$. »

Proposition 3 : « Pour toutes les valeurs de n, on a $u_n = n^2 + 1$. »

3. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	N un entier naturel non nul
Initialisation :	P = 0
Traitement :	Pour K allant de 0 à N :
	Affecter à P la valeur P + K
	Afficher P
Fin de l'algorithme	

a. Faire fonctionner cet algorithme avec N = 3.
Obtient-on à l'affichage les valeurs des quatre premiers termes de la suite u ?

b. Modifier cet algorithme de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite u.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel k, $\left(k^2 + k\right) + 2(k + 1) = (k + 1)^2 + k + 1$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n$.

☆ Exercice 50 (Métropole–Réunion septembre 2011)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{0,5x} - 5.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe d'équation $y = 4\mathrm{e}^{0,5x} - 5$ représentant f dans un repère orthogonaL

1. a. Étudier les variations de la fonction f.

b. Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse :
Affirmation 1 : la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe une et une seule fois l'axe des abscisses.
Affirmation 2 : la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = -5$.
Affirmation 3 : il existe un unique point de la courbe $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	P est un réel strictement positif
Initialisation :	Donner à X la valeur 0 et à Y la valeur -1
Traitement :	Tant que $Y < 0$:
	Donner à X la valeur $X + P$
	Donner à Y la valeur $f(X)$
	(f étant la fonction définie précédemment)
Sortie :	Afficher $X - P$ et X

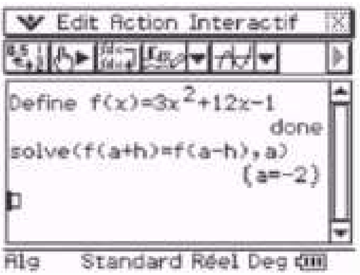
a. On entre une valeur de P égale à 0,1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

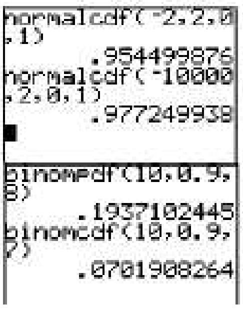
b. On a fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de P. On a obtenu en sortie les nombres $0,44$ et $0,45$. Quelle valeur de P avait-on choisie en entrée ?

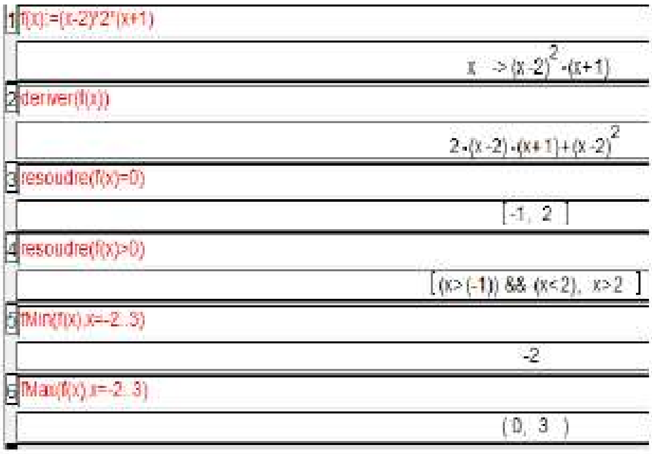
c. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
On entre une valeur de P égale à $0,001$. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?

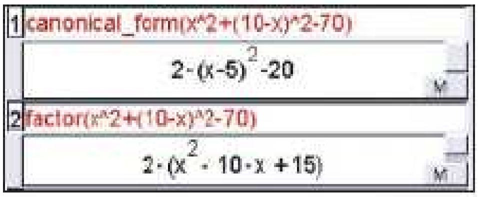
12. Atelier calcul formel

12.a) Comment utiliser les réponses renvoyées par un logiciel de calcul formel









Calcul formel	Seconde	Première	Terminale
Traiter une expression algébrique			
Traiter une équation			
Traiter une inéquation			
Différentes écritures d'une même expression			
Aide à conjecturer			
Aide les élèves en difficultés			
…			

⋆ Exercice 51
Donner des exemples d'application du calcul formel en termianle dans les différentes parties du programme.
Des exemples dans vos classes cette année…
Les différentes questions possibles sur le calcul formel :

- Comprendre et analyser les réponses d'un logiciel ;
- Conjecturer avec le calcul formel ;
- auto-correction avec le logiciel ;
- les différents types de logiciel, comment apporter aux élèves tout l'intérêt du calcul formel, par quels moyens ?

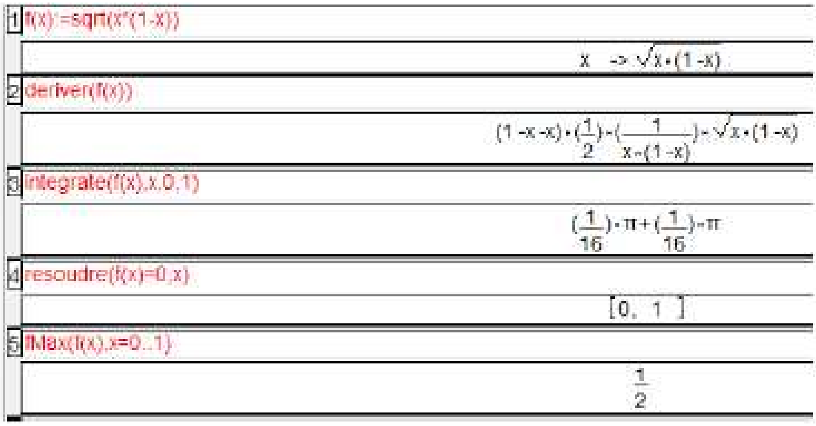
12.b) Comment évaluer le calcul formel ?

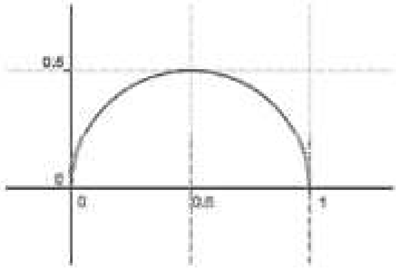
Voici des énoncés et des copies d'élèves à évaluer…

⋆ Exercice 52
L'objectif est de découvrir une égalité due au mathématicien anglais Wallis (1616–1703).

on note f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Adrien utilise un logiciel de calcul formel. À plusieurs reprises, il entre une commande et le logiciel renvoie une réponse. Il obtient l'écran suivant :



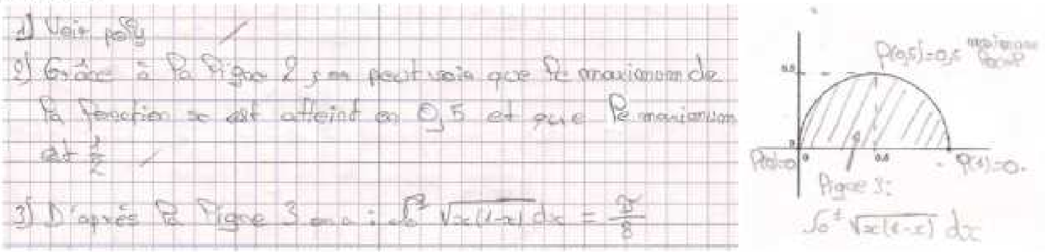


1. Traduire sur le graphique, illustrant la courbe représentative de la fonction f les lignes 3, 4 et 5.

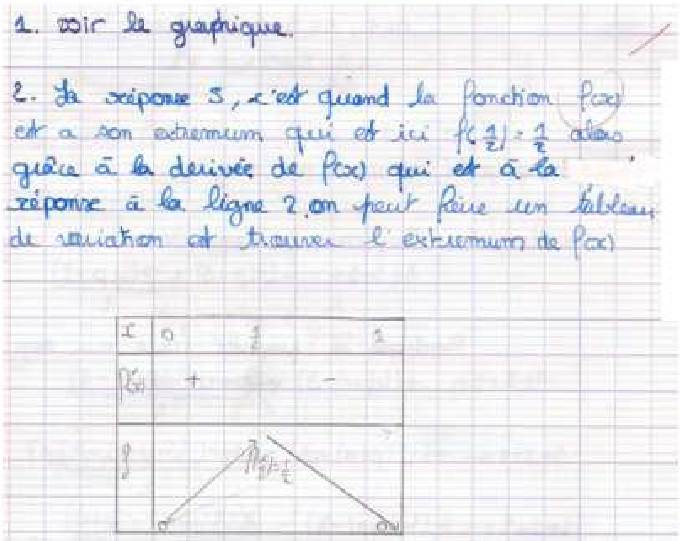
2. Justifier la réponse5 en utilisant la ligne 2 par exemple.

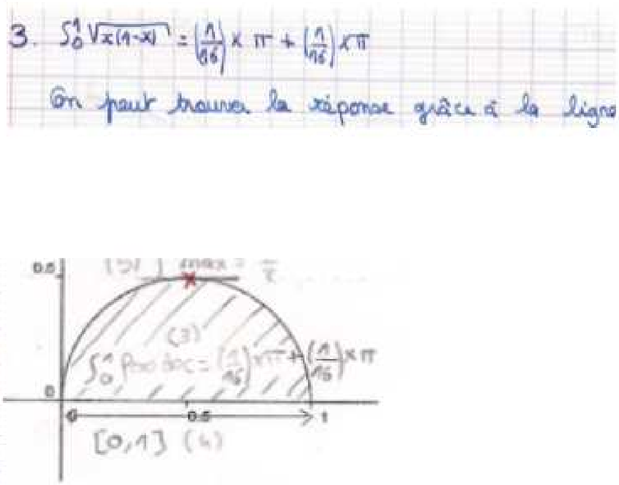
3. Conclusion, déterminer $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$, justifier votre résultat.

Copie 1 :



Copie 2 :





☆ Exercice 53 (TES)

Voici différents résultats obtenus avec un logiciel de calcul formel :

```
1 f(x):=3*x^2*(x^3-7)^5
```

$$x \to (3 \cdot x^2) \cdot (x^3 - 7)^5$$

```
2 integrer(f(x),x)
```

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{x^3 \cdot 3}{3} - 7\right)^6}{18}$$

```
3 factoriser(integrer(f(x),x))
```

$$\frac{(x^3 - 7)^6}{6}$$

```
4 g(x):=1/6*(x^3-7)^6
```

$$x \to \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (x^3 - 7)^6$$

```
5 deriver(g(x),x)
```

$$\frac{3 \cdot x^2 \cdot 6 \cdot (x^3 - 7)^5}{6}$$

```
6 factoriser(deriver(g(x),x))
```

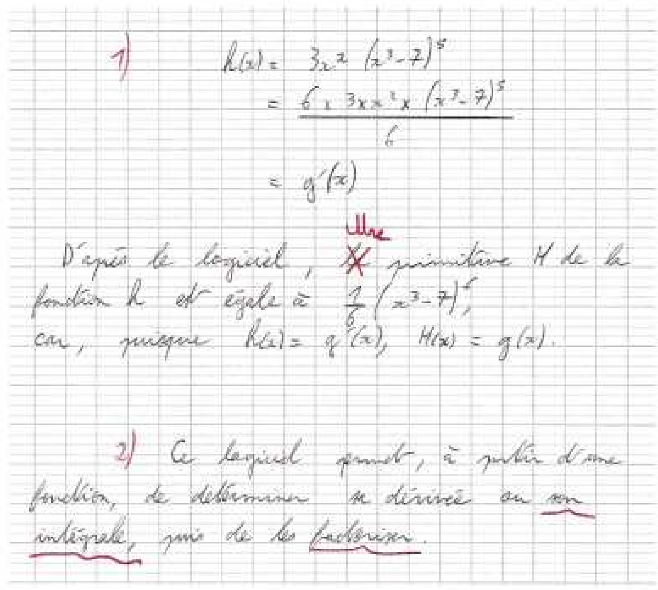
$$3 \cdot x^2 \cdot (x^3 - 7)^5$$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x^2(x^3 - 7)^5$.

1. En vous aidant des résultats obtenus avec le logiciel de calcul formel, déterminer une primitive H sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2. Expliquer les différentes fonctionnalités du logiciel utilisées ici.

Copie 1:


1) $h(x) = 3x^2 (x^3-7)^5$

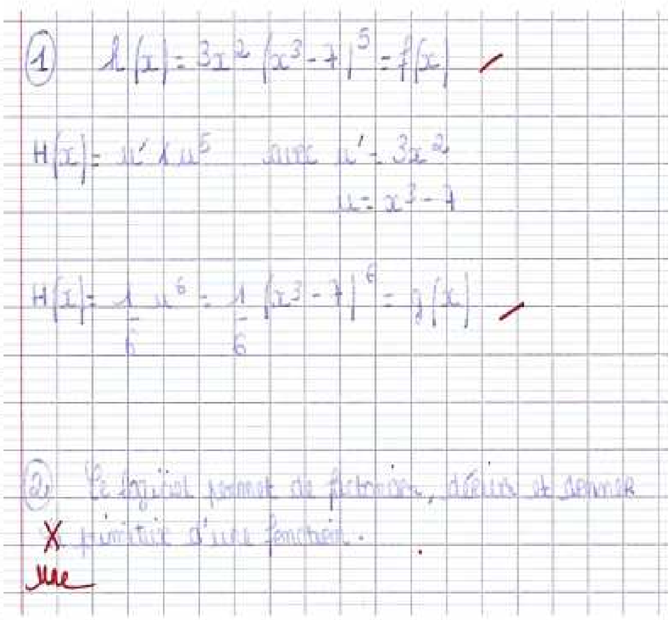
$= \frac{6 \times 3x \times x^2 (x^3-7)^5}{6}$

$= g'(x)$

D'après le logiciel, ~~X~~ Une primitive H de la fonction h est égale à $\frac{1}{6}(x^3-7)^6$, car, puisque $h(x) = g'(x)$, $H(x) = g(x)$.

2) Ce logiciel permet, à partir d'une fonction, de déterminer sa dérivée ou son intégrale, puis de les factoriser.

Copie 2:


1. $h(x) = 3x^2 (x^3-7)^5 = f(x)$

$H(x) = u' \times u^5$ avec $u' = 3x^2$, $u = x^3-7$

$H(x) = \frac{1}{6} u^6 = \frac{1}{6}(x^3-7)^6 = g(x)$

2. Le logiciel permet de factoriser, dériver et donner X primitive d'une fonction.

Une

12.c) le calcul formel au bac

Prise de recul face à une copie d'écran ;

✭ EXERCICE 54 (SUJET BAC ES)

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle $[0,1;10]$ par

$$B(x) = 10 \times \frac{1+\ln x}{x}.$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.

$\boxed{1.}$ Coraline utilise un logiciel de calcul formel. À plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse. Elle obtient l'écran suivant :

→ `B(x):=10*(1+ln(x))/x`

$$x-> 10*(1+ln(x)/x)$$

→ `deriver(B(x),x)`

$$\frac{10}{x^2} + \frac{10*(1+ln(x))*(-1)}{x^2}$$

→ `resoudre(B(x)=0,x)`

$$[exp(-1)]$$

→ `resoudre(B(x)>0,x)`

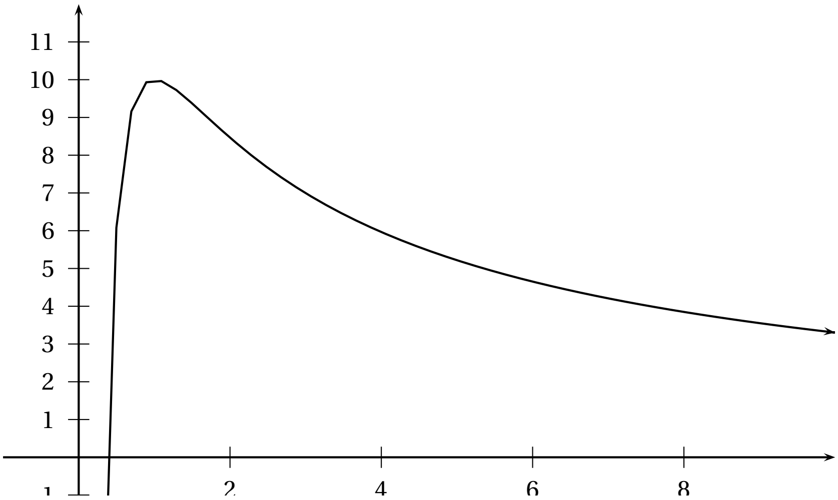
$$[x > exp(-1)]$$

→ `maximum(B(x),[0.1,10])`

$$10$$

a. Traduire sur le graphique donné en annexe, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

b. Justifier la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interpréter cette valeur en terme de résultats mensuel pour l'entreprise.

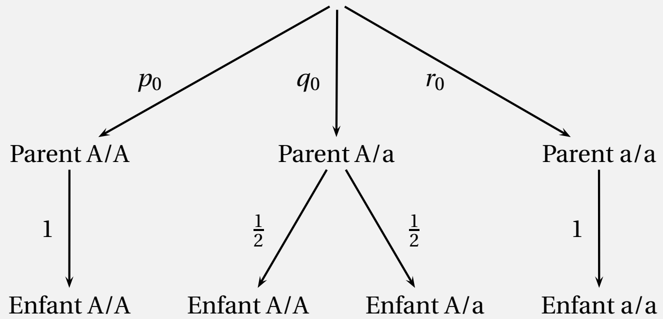


13. Interdisciplinaire

13.a) Probabilité et génétique dans le cours de terminale S

On s'intéresse à un gène à deux allèles, A et a. Chaque gène se trouve en deux exemplaires, un individu peut donc être de l'un des trois génotypes : A/A, A/a ou a/a. Un individu a/a nait malade. On considère une population dont les proportions respectives de ces trois génotypes sont p_0, q_0 et r_0 et on étudie le génotype d'un enfant issu de cette population.

1. On suppose que l'un des deux parents est de génotype A/A.
   a. Quelle est la probabilité p_1' que l'enfant soit de génotype A/A ?
   b. Quelle est la probabilité q_1' que l'enfant soit de génotype A/a ?

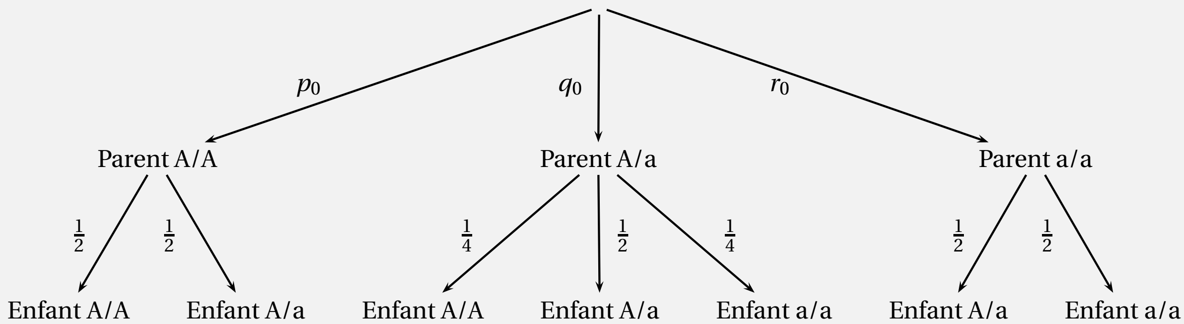


Les probabilités sont obtenues à l'aide d'échiquiers de croisement du type :

	A	a
A	A/A	A/a
A	A/A	A/a

Donc $p_1' = p_0 + \dfrac{1}{2}q_0$ et $q_1' = \dfrac{1}{2}q_0 + r_0$.

2. On suppose que l'un des deux parents est de génotype A/a.
   a. Quelle est la probabilité p_1'' que l'enfant soit de génotype A/A ?
   b. Quelle est la probabilité q_1'' que l'enfant soit de génotype A/a ?
   c. Quelle est la probabilité r_1'' que l'enfant soit de génotype a/a ?



Donc $p_1'' = \dfrac{1}{2}p_0 + \dfrac{1}{4}q_0$, $q_1'' = \dfrac{1}{2}p_0 + \dfrac{1}{2}q_0 + \dfrac{1}{2}r_0$ et $r_1'' = \dfrac{1}{4}q_0 + \dfrac{1}{2}r_0$.

3. a. On note p_1 la probabilité qu'un enfant de première génération ait le génotype A/A. Déterminer p_1 en fonction de p_0 et q_0 .

On applique la formule des probabilités totales : $p_1 = p_1' p_0 + p_1'' q_0 = \cdots = \left(p_0 + \dfrac{1}{2}q_0\right)^2$.

   b. On note r_1 la probabilité qu'un enfant de première génération ait le génotype a/a. Déterminer r_1 en fonction de r_0 et q_0.

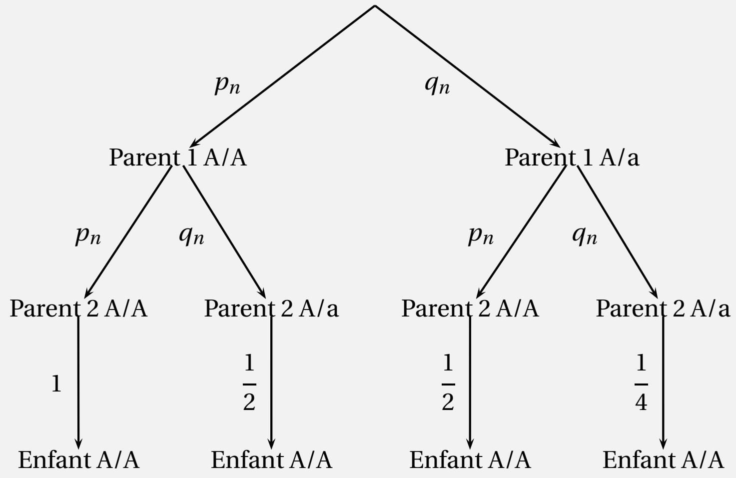
On démontre de même que $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

c. En déduire la probabilité q_1 qu'un enfant de première génération ait le génotype A/a.

$q_1 = 1 - p_1 - q_1$.

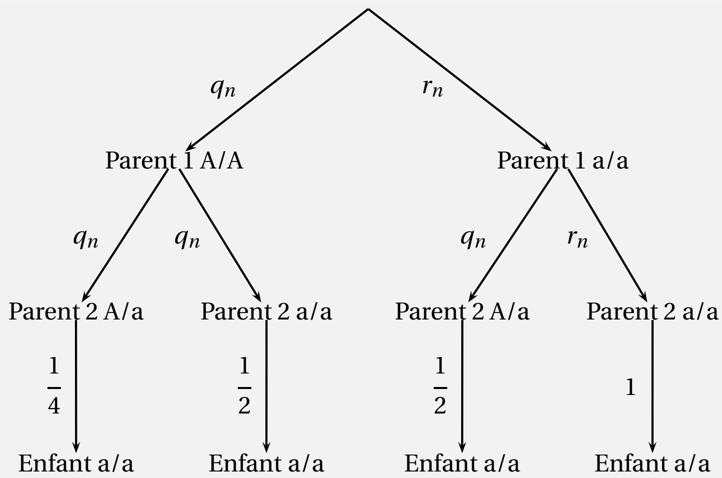
4. On note p_n, q_n et r_n les proportions respectives des trois génotypes à la $n^{\text{ième}}$ génération.

a. Déterminer la probabilité p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.



$$p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2}p_n q_n + \frac{1}{2}q_n p_n + \frac{1}{4}q_n^2 = \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2.$$

b. Déterminer la probabilité q_{n+1} en fonction de r_n et q_n.



$$r_{n+1} = \cdots = \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2.$$

c. En déduire la probabilité q_n en fonction de p_n, q_n et r_n.

$q_{n+1} = 1 - (p_{n+1} + q_{n+1})$.

5. a. À l'aide d'un tableur calculer les premiers termes des suites $^{p}_{n}$), (q_n) et (r_n).

b. Faire varier les valeurs de p_0, q_0 et r_0. Quelle conjecture peut-on émettre ?

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	p_0	0,5		n	p_n	q_n	r_n		p_n-r_n
	q_0	0,2		0	0,5	0,2	0,3		0,2
	r_0	0,3		1	0,36	0,48	0,16		0,2
				2	0,36	0,48	0,16		0,2
				3	0,36	0,48	0,16		0,2
				4	0,36	0,48	0,16		0,2
				5	0,36	0,48	0,16		0,2
				6	0,36	0,48	0,16		0,2
				7	0,36	0,48	0,16		0,2
				8	0,36	0,48	0,16		0,2
				9	0,36	0,48	0,16		0,2
				10	0,36	0,48	0,16		0,2

Il semblerait que, à partir de la génération 1 les probabilités soient constantes mais qu'elles dépendent des valeurs initiales.

$\boxed{6.}$ Démonstration de la conjecture :

a. Montrer que la suite $(p_n - r_n)$ est constante.

☞ $p_{n+1} - r_{n+1} = \cdots = p_n - r_n$.

b. En déduire que la suite (p_n) est constante.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n - r_n = p_0 - r_0 = k$.
Alors $q_n = 1 - p_n - r_n = 1 - 2p_n + k$.
Ainsi $p_{n+1} = \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2 = \left(p_n + \frac{1}{2} - p_n + \frac{1}{2}k\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)^2 = \frac{1}{4}(p_0 - r_0 + 1)^2$: la suite (p_n) est constante.

c. Donner les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de p_0 et q_0.

$p_n = \frac{1}{4}(p_0 - r_0 + 1)^2$
$r_n = p_n - k = \ldots$
$q_n = 1 - p_n - r_n = \ldots$

13.b) Essais thérapeutiques

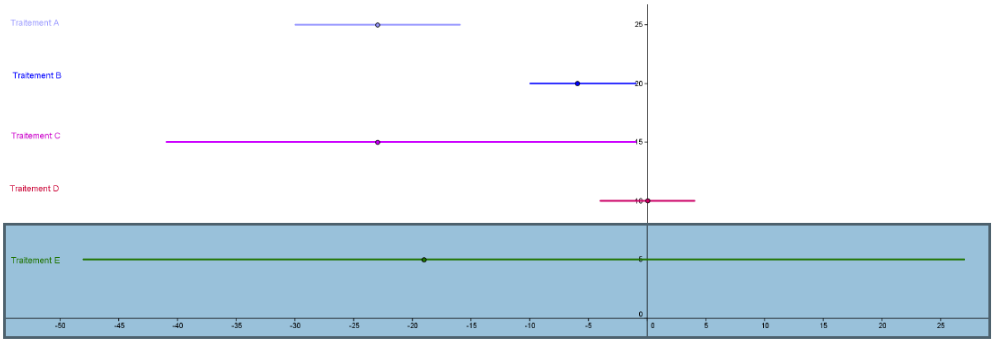
Interprétation des résultats d'essais thérapeutiques :

On souhaite tester l'effet de cinq traitements sur une maladie. À l'issue des essais on obtient le tableau suivant :

Essai	RRR	IC 95%	p
A	-23%	$[-30\%; -16\%]$	0,000
B	-6%	$[-10\%; -1\%]$	0,024
C	-23%	$[-41\%; -1\%]$	0,043
D	0%	$[-4\%; 4\%]$	1,000
E	-19%	$[-48\%; 27\%]$	0,362

RRR : « réduction » relative de risque. Par convention dans cet exemple, une RRR négative signe une réduction de risque. A l'opposé, une valeur positive témoigne d'une augmentation.

On représente alors les résultats sur un graphique :



Analyse du traitement A :

Le traitement A entraîne une RRR (réduction relative de risques) de -23% avec un IC=[-30 ;-16] . La RRR est négative, on a donc bien une réduction. Il existe donc un effet statistiquement significatif car l'IC ne contient pas la valeur 0. La RRR est de taille importante et connue avec précision car l'IC est de taille relativement petite. De plus, pour toutes les valeurs de l'effet, la RRR reste négative, au pire elle vaut -16%. On peut donc conclure que le traitement A semble efficace.

Analyse du traitement B :

Le traitement B entraîne une RRR (réduction relative de risques) de -6% avec un IC=[-10 ;-1] . Il existe donc un effet du traitement statistiquement significatif car l'IC ne contient pas la valeur 0, l'effet du traitement est connu avec précision car l'IC est étroit mais le traitement n'est pas prouvé ponctuellement efficace car la borne inférieure est -10% donc faible et peu intéressante en pratique.

Analyse du traitement C :

Le traitement C entraîne une RRR (réduction relative de risques) de -23% avec un IC=[-41 ;-1] . Donc il existe un effet statistiquement significatif : l'estimation ponctuelle (-23%) témoigne d'un effet substantiel, la borne inférieure (-41%) également. Mais l'incertitude sur ce résultat est grande et l'effet peut être quasiment nul (-1%). Il est donc difficile de recommander ce traitement. Un essai supplémentaire est souhaitable pour améliorer la précision de l'estimation.

Analyse du traitement D :

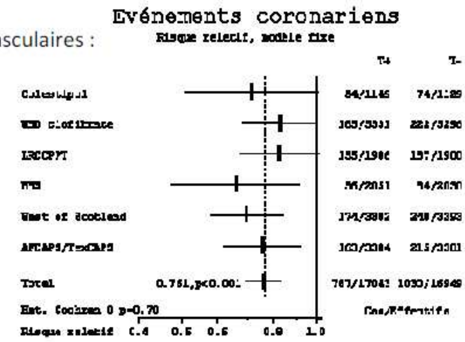
Le traitement D n'entraine pas de modifications du RRR (0%) avec un IC=[-4 ;4] . Ce résultat n'est pas intéressant médicalement. Au mieux le traitement pourrait engendrer une réduction de 4% ce qui ne présente pas beaucoup d'intérêt. Bien qu'en toute rigueur il ne soit pas possible de conclure en l'absence d'efficacité, l'IC étroit autorise à conclure que très probablement le traitement n'est d'aucune efficacité.

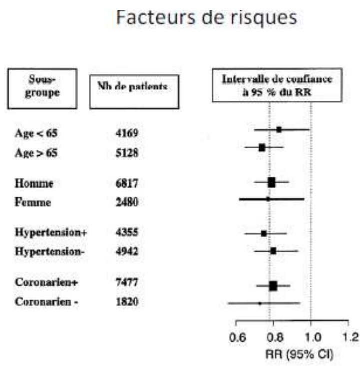
Analyse du traitement E :

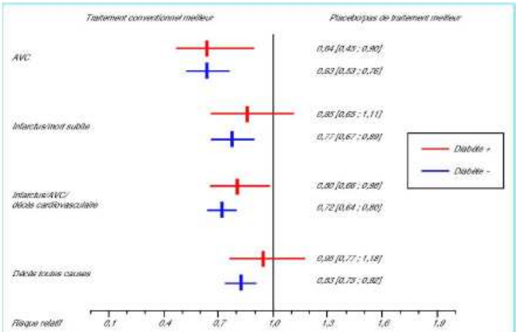
Le traitement E entraine une RRR de -19% mais l'IC ([-48 ;27]) est de très grande taille. Il apparait clairement que, au vu de la borne supérieure de 27%, ce résultat est non significatif. Cependant l'intervalle est en très grande partie du côté favorable ce qui renforce la possibilité d'existence d'un effet. Il est donc possible que le traitement soit efficace et que cette efficacité soit suffisamment importante pour être intéressante en pratique. Ce résultat encourage à réaliser un nouvel essai de plus grande puissance.

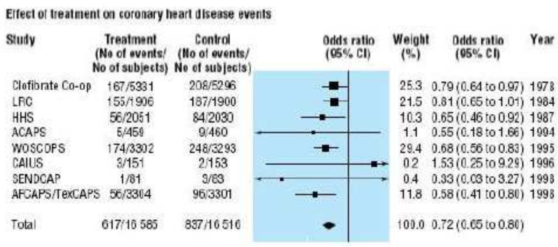
Données pour appliquer à d'autres exemples :

cardiovasculaires :



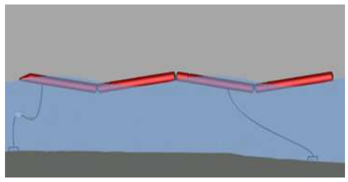






13.c) Ondes progressives

✯ EXERCICE 55



L'université de Edinburgh a mis au point une plate-forme équipée de flotteurs. Animée d'un mouvement oscillatoire induit par la mer, ils permettent de capturer l'énergie des vagues.

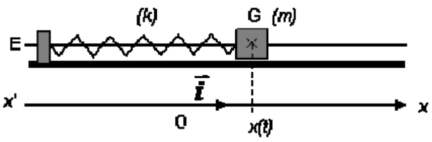
La distance d exprimée en mètres du fond marin au centre de flottaison d'un flotteur est donnée, en fonction du temps t exprimé en secondes par la relation :

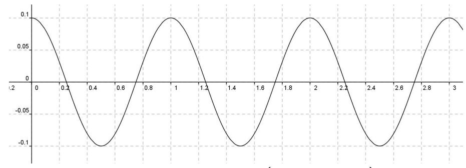
$$d(t) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 50.$$

1. Déterminer l'amplitude du mouvement du flotteur et la période du mouvement.
2. Lors d'une période pendant combien de temps le flotteur monte-t-il ?
3. a. Représenter graphiquement la fonction d en fonction du temps.
   b. Quels semblent être les instants où la vitesse du flotteur est maximale ?
   c. Vérifier la conjecture émise.

Le convertisseur d'énergie Pelamis, est développé par la société écossaise Ocean Power Delivery. Un convertisseur Pelamis génère 750 kW ce qui représente la consommation de 500 foyers et un parc machine d'une surface de 1 km2 devrait délivrer assez d'énergie pour 20.000 foyers.

✯ EXERCICE 56 Un oscillateur est formé d'un dispositif solide-ressort horizontal. Le ressort est de masse négligeable et à spires non jointives. Le solide S repose sur un coussin d'air. La position de son centre d'inertie est repérée par son abscisse x dans un repère (O ; i) À l'équilibre, le centre d'inertie coïncide avec l'origine O du repère. On réalise un enregistrement dans une soufflerie :





En appliquant la deuxième loi de Newton, on montre que $x(t) = X_n \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \Phi_0\right)$.

$\boxed{1.}$ Déterminer la période propre T_0 de l'oscillateur.

$\boxed{2.}$ Donner l'équation horaire du mouvement sachant que S est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale, au point d'abscisse $x = 10,0$ cm.

$\boxed{3.}$ Déterminer les instants où la vitesse du solide est nulle ainsi que ceux pour lesquels la vitesse est maximale.

13.d) Les décibels

En acoustique physiologique on constate que la sensation est proportionnelle au logarithme décimal de la pression acoustique. Ceci a conduit à la définition d'échelles logarithmiques pour la mesure des gains.
Les gains en décibels sont définis par en fonction de la pulsation ω par :
Gains en tension : $G(\omega)_{\text{dB}} = 20\log(G(\omega))$.
Gains en puissance : $P(\omega)_{\text{dB}} = 10\log(P(\omega))$.

Pour le gain en tension on a $G = 20\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -10\log\left(1+\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

$\boxed{1.}$ Calculer les gains pour :

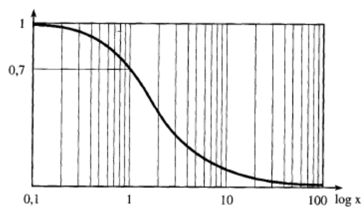
a. $\omega = \dfrac{\omega_0}{10}$.
b. $\omega = \omega_0$.
c. $\omega = 10\omega_0$.

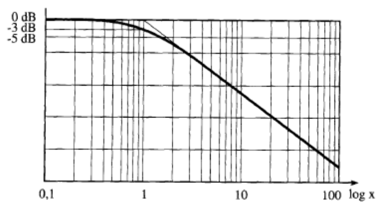
> a. $G = -0,0432$ dB.
> b. $G = -3$ dB.
> c. $G = -20$ dB.

$\boxed{2.}$ Calculer le coefficient d'atténuation par décade c'est-à-dire la différence entre le gain pour une pulsation donnée et le gain pour une pulsation égale à son dixième. Que remarque-t-on ?

> $p = \left(-20\log\left(\dfrac{10\omega}{\omega_0}\right)\right) - \left(-20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)\right) = -20\log 10.$

$\boxed{3.}$ En posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, on a représenté ci-dessous la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ dans un repère « classique », puis cette même fonction dans un repère semi logarithmique et enfin la fonction $x \mapsto -10\log(1+x^2)$également dans un repère semi logarithmique. Quel intérêt semble représenter le repère semi logarithmique ?

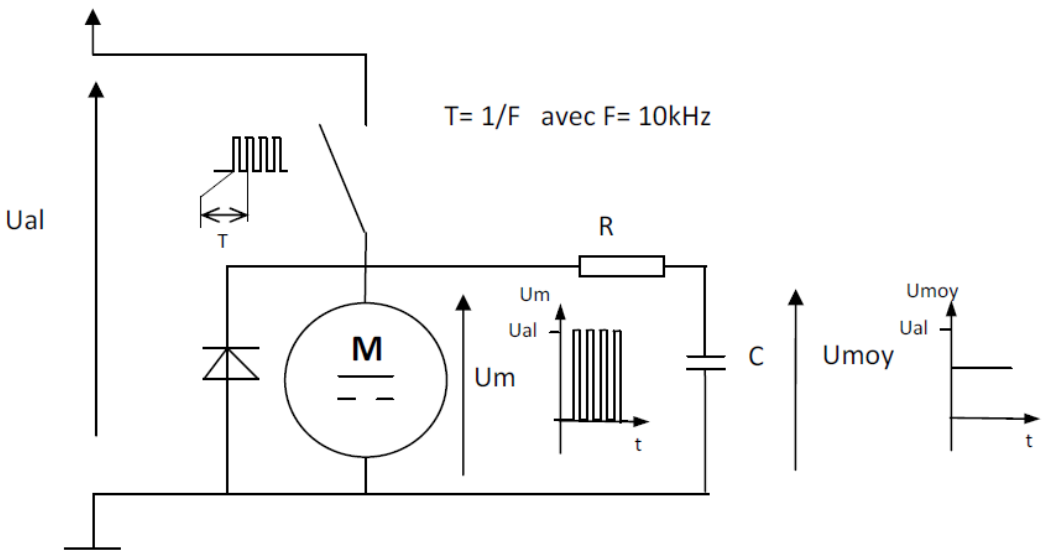




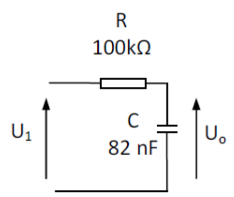
On observe que la courbe 1 est peu lisible pour les petites et grandes valeurs de x. Par contre les courbes 2 et 3 sont exploitables pour toutes les valeurs de x . On remarque de plus que la courbe 3 fait apparaître l'asymptote $G = 20\log x$.

13.e) Gain lié à une fonction de transfert

Le moteur d'un ouvre porte automatique est alimenté par un modulateur d'énergie. Dans le but d'évaluer la vitesse d'ouverture de celui-ci, vous devez mesurer la valeur moyenne de la tension aux bornes du moteur, pour cela on vous propose un filtre passe bas RC. La fréquence du signal de modulation est de 10KHz, vous devez vérifier que le filtre proposé convient.



Filtre RC passe bas étudié :



On définit la fréquence de coupure f_C d'un système comme étant celle pour laquelle le rapport $\dfrac{U_0}{U_1}$ est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et le gain, exprimé en Db par $G = \log\left(\dfrac{U_0}{U_1}\right)$.

Pour ce filtre on a $\dfrac{U_0}{U_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(2\pi RCf)^2}}$.

On donne $C = 82 \times 10^{-9}$F et $R = 100 \times 10^3\,\Omega$.

1. Compléter le tableau suivant :

Fréquence (en Hz)	1	5	10	50	100	1000	10^4	10^5	10^6
Gain									

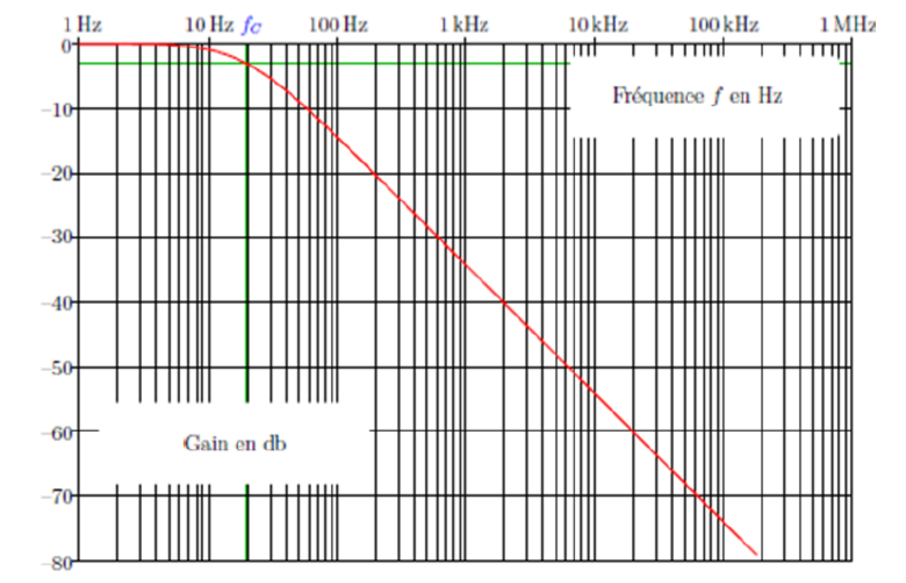
2. Déterminer la fréquence de coupure. En déduire le gain correspondant.

3. a. Afin d'étudier l'évolution du gain en fonction de la fréquence, reporter les valeurs du tableau dans un repère semi logarithmique. Placer la fréquence de coupure et le gain correspondant.

   b. Déduire du graphique précédent l'ordre de grandeur du coefficient d'atténuation pour une fréquence supérieure à 1 kHz Le coefficient d'atténuation du filtre s'exprime en Db/octave et on appelle octave l'écart entre une fréquence et sa fréquence double.

Fréquence (en Hz)	1	5	10	50	100	1000	10^4	10^5	10^6
Gain	-0,0115	-0,2791	-1,022	-8,829	-14,40	-34,24	-54,24	-74,24	94,24

$\frac{U_1}{U_0} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\pi RCf = 1$ soit $f = \frac{1}{2\pi RC}$.
On obtient $f_C \approx 19,409$ Hz.
Pour le gain $G = 20\log\sqrt{2}$, soit $G \approx 3$ dB.



La courbe représentative semble « droite » à partir de 500Hz . On mesure la différence de gain par exemple entre 50kHz et 100kHz . On trouve une atténuation de 6 dB par octave.
Conclusion : A 10kHz l'atténuation est de -55dB ce filtre passe bas atténue fortement la fréquence de modulation, il permettra donc d'extraire la valeur moyenne de la tension aux bornes du moteur.

CHAPITRE 2

DOCUMENTS ISSUS DE LA JOURNÉE DE FORMATION DU 20/01/2012

PAF Amiens - Formation Enseignement des Mathématiques - 20 janvier 2012
S.DUCAY –UFR des Sciences - LAMFA CNRS UMR 6140

Mathématiques : statistiques et simulation

1. Introduction : échantillonage et proportion

(Extrait du document ressource pour la classe de seconde)
Dans le sens commun des sondages, un échantillon est un sous-ensemble obtenu par prélèvement aléatoire dans une population.
En statistique, un échantillon de taille n est est la liste des n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience. Par exemple :

- 100 lancers d'une pièce, en observant les apparitions de Pile ;
- 100 lancers d'un dé à 6 faces, en observant les apparitions du 4 ;
- 100 tirages succcessifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et 1 boule verte, en observant les apparitions d'une boule blanche.

Ces trois exemples relèvent du modèle de Bernoulli qui affecte la probabilité p au nombre 1, et la probabilité $1-p$ *au nombre* 0.

Dans les deux premiers exemples, p peut être vue « directement » comme une probabilité. Dans le dernier cas, $p=\frac{2}{3}$ pourrait être d'abord vue comme la proportion de boules blanches dans l'urne, mais c'est aussi la probabilité d'obtenir une boule blanche lors d'un tirage.
Dans les trois cas, ce calcul de probabilité (sur un ensemble fini) relève du programme de seconde.

Le résultat d'une expérience aléatoire à 2 issues peut être représenté par la

Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

> DÉFINITION 6
> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
> Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, que l'on note $\mathscr{B}(p)$, si et seulement si X est à valeurs dans $\{0;1\}$, et $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.
> On a alors $E(X)=p$ et $Var(X)=p(1-p)$.

Exemple d'une urne contenant une proportion $p=\frac{2}{3}$ de boules blanches
On tire une boule au hasard dans l'urne : le nombre de "boule blanche" obtenu en un tirage est une variable aléatoire X de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$: $P(X=1)=p=\frac{2}{3}$ et $P(X=0)=1-p=\frac{1}{3}$. On a $E(X)=\frac{2}{3}$ et $Var(X)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.
Si on effectue $n=100$ tirages avec remise d'une boule, on observe la réalisation de X_1 , X_2 , ... , X_n , variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On dit que l'on a un échantillon aléatoire simple de taille $n=100$ de loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{2}{3}$.

Le nombre de "boules blanches" obtenues en $n=100$ tirages est la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

La fréquence de "boules blanches" obtenue est la variable aléatoire : $F_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

C'est ce point de vue qui est suivi pour le travail de simulation de ces situations. Remarquons qu'à ce stade, il n'est pas nécessaire de connaître les lois de probabilité de ces variables aléatoires. Il faut seulement savoir simuler des 1 et des 0, avec probabilité p et $1-p$.

Ayant procédé par répétitions indépendantes d'expériences, $nF_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi Binomiale $\mathscr{B}\left(n,p\right) = \mathscr{B}\left(100;\frac{2}{3}\right)$.

Loi Binomiale $\mathscr{B}\left(n,p\right)$ (vue en première)

> DÉFINITION 7
> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
> Une variable aléatoire X suit la loi de Binomiale des paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, que l'on note $\mathscr{B}\left(n,p\right)$, si et seulement si X est à valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$, et pour tout $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

> On a alors $E(X) = np$ et $Var(X) = np(1-p)$.

Revenant à F_n, on a alors $nE(F_n) = E(nF_n) = np$ et $n^2 Var(F_n) = Var(nF_n) = np(1-p)$, d'où $E(F_n) = p = \frac{2}{3}$ et $Var(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{2}{9n}$.

On constate donc que lorsqu'on augmente la taille n de l'échantillon, l'espérance de F_n reste constante, alors que la variance diminue.

Ce que l'on peut observer sur les simulations (en seconde), et qui est confirmé par la notion de variable aléatoire (en première et terminale), c'est que pour n répétitions indépendantes d'expériences de Bernoulli :

- différents échantillons de taille n peuvent donner différentes fréquences f_n d'apparition du nombre 1 ;
- ces différentes fréquences f_n fluctuent autour de la valeur p, en restant "presque toutes" dans un intervalle centré en p.

2. Intervalle de fluctuation : en seconde, en première, en terminale

2.a) En seconde : simulations et prise de décision

Conjecture à partir des simulations :
F_n appartient à l'intervalle de fluctuation $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins $0,95$.
Conditions d'application : $n \geqslant 25$, p compris entre $0,2$ et $0,8$, seuil 95%.
Sur les simulations, on observe que f_n est dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ pour environ 95% des échantillons.
Utilisation de l'intervalle de fluctuation pour la prise de décision :

- si p est connue, et que f_n n'appartient pas à $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on considère que l'échantillon n'est pas représentatif ; l'observation de f_n n'est pas compatible avec la valeur de p, au sens où une observation en dehors de l'intervalle de fluctuation ne s'obtient que pour environ 5% des échantillons.
- si l'on fait une hypothèse sur sa valeur de p, disons $p = p_0$, et que f_n n'appartient pas à $\left[p_0-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p_0+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on considère que l'observation de f_n n'est pas compatible avec la valeur p_0 supposée de p, que l'on rejettera avec un risque d'erreur de 5%.

Exemple d'application de l'intervalle de fluctuation
Dans une certaine espèce de rongeur, on a compté 206 mâles sur 400 naissances. Cela est-il conforme à l'hypothèse d'équiprobabilité male/femelle à chaque naissance ?
On peut considérer la situation suivante.
Population : les rongeurs d'une certaine espèce.
Variable : le sexe, à deux modalités (mâle et femelle), représenté par une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, où p est la proportion de mâles dans la population ; on a ainsi $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

Echantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de taille $n = 400$ de X.
Observation de l'échantillon : $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 1, 0, 1, ..., 0)$.
Estimateur de la proportion p : $F_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, proportion (ou fréquence) de mâles dans l'échantillon, où $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ représente le nombre de mâles de l'échantillon.
Estimation ponctuelle de la proportion p : $f_n = \dfrac{\sum\_i = 1^n x_i}{n} = \dfrac{206}{400} = 0.515$, fréquence (ou proportion) de mâles dans l'observation de l'échantillon.
Supposons l'équiprobabilité male/femelle à chaque naissance, autrement dit que $p = 0,5$.
Pour un échantillon de $n = 400$ naissances, l'intervalle de fluctuation de F_n est $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0.5 - \dfrac{1}{\sqrt{400}}\ ; 0.5 + \dfrac{1}{\sqrt{400}}\right] =$ $[0.45\ ;\ 0.55]$.
Notre observation $f_n = 0.515$ appartient à l'intervalle de fluctuation : elle est donc conforme à l'hypothèse $p = 0,5$, qui n'est donc pas rejetée au rique 5%.

2.b) En première : avec la loi Binomiale

On s'appuie ici sur le document d'accompagnement qui précise le contenu « Utilisation de la loi binomiale pour une prise de décision à partir d'une fréquence » et la capacité correspondante, « Exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale, pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion », des programmes du lycée.
Considérons une variable aléatoire X de loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Cette variable aélatoire est à valeurs entières dans l'intervalle $[0, n]$.
On cherche à partager l'intervalle $[0, n]$, où X prend ses valeurs, en trois intervalles $[0, a-1]$, $[a, b]$ et $[b+1, n]$ de sorte que X prenne ses valeurs dans chacun des intervalles extrêmes avec une probabilité proche de 0,025, sans dépasser cette valeur.
En tabulant les probabilités cumulées $P(X \leqslant k)$, pour k allant de 0 à n, il suffit de déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$, c'est-à-dire $P(X > b) \leqslant 0,025$. Autrement dit, a est le plus grand entier tel que $P(X < a) \leqslant 0.25$. On observe aussi que $a < b$.
On a ainsi $P((X < a) \cup (X > b)) = P(X < a) + P(X > b) \leqslant 0.05$
et donc $P(a \leqslant X \leqslant b) = P\left(\overline{(X < a) \cup (X > b)}\right) \geqslant 0.95$, en étant "assez proche" de 0.95.
Comme $F_n = \dfrac{X}{n}$, on a ainsi $P\left(\dfrac{a}{n} \leqslant F_n \leqslant \dfrac{b}{n}\right) \geqslant 0.95$, en étant "assez proche" de 0.95.

> La règle de décision est la suivante : si la fréquence observée f_n appartient à l'**intervalle de fluctuation à 95 %** $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question et on l'accepte ; sinon, on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut p.

Pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, on observe que l'intervalle de fluctuation $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$ est sensiblement le même que l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ proposé dans le programme de seconde.
Utilisation pour la prise de décision : analogue à ce qui est fait en seconde

2.c) En terminale : avec la loi Normale

> On s'appuie sur le fait que si n est suffisamment grand, $U = \dfrac{F_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ suit approximativement la loi normale $\mathscr{N}(0; 1)$.
> On détermine le réel u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant U \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$. Pour $\alpha = 5\%$, on a $u_{0.05} = 1.96$.
> On en déduit l'intervalle de fluctuation asymptotique $IF_p = \left[p - \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} u_\alpha\ ;\ p + \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} u_\alpha\right]$ au niveau $1 - \alpha$.
> Conditions d'application : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, seuil $1 - \alpha$.

Utilisation pour la prise de décision : analogue à ce qui est fait en seconde et première.

Lien avec l'intervalle de fluctuation au seuil 95% donné en seconde :

- pour tout $p \in [0,1]$, on a $0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \leqslant \sqrt{p(1-p)} \leqslant \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} u_\alpha \leqslant \frac{1.96}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc on a l'inclusion d'événements $IF_p \subset IF'_p = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et donc $P\left(F_n \in IF'_p\right) \geqslant P\left(F_n \in IF_p\right) = 1 - \alpha = 0.95$:
$IF'_p = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de fluctuation de F_n de niveau (supérieur ou égal à) $1 - \alpha = 0.95$.

- pour tout $p \in [0.2, 0.8]$, on a $0.16 \leqslant p(1-p) \leqslant 0.25$, $0.4 \leqslant \sqrt{p(1-p)} \leqslant 0.5$ et donc $0.784 \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.4 \times 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} u_\alpha \leqslant 0.5 \times 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.98 \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Intervalle de confiance : en seconde et en terminale

3.a) En seconde

L'appartenance de F_n à l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ équivaut à l'appartence de p à $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Ainsi, l'intervalle de confiance $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité d'au moins 0,95.

Sur les simulations, on observe que p est dans l'intervalle $\left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ pour environ 95% des échantillons.

Utilisation de l'intervalle de confiance pour l'estimation de p inconnue : à partir de l'observation f_n, on obtient une fourchette contenant p au niveau de confiance $0,95$.

Exemple d'intervalle de confiance
Reprenons l'exemple précédent, pour lequel on a observé $f_n = 0.515$ sur un échantillon de taille $n = 400$.
Intervalle de confiance de la proportion p :
$$\left[f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0.515 - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0.515 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0.465\ ;\ 0.565].$$

3.b) En terminale

Le résultat vu en seconde est validé par le calcul de l'intervalle de fluctuation IF'_p vu ci-dessus.

L'intervalle de confiance $\left[f_n - \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n-1}} u_\alpha\ ,\ f_n + \sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n-1}} u_\alpha\right]$ vu dans le supérieur n'est pas au programme.

4. Nouvelles notions en terminale

4.a) Variable centrée réduite

Une variable aléatoire X est dite centrée réduite si son espérance est nulle et son écart-type vaut 1, ce qui s'écrit $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$

Soit maintenant une variable aléatoire X telle que $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma \neq 0$; on a donc $\sigma > 0$.
La variable aléatoire $X - m$ a une espérance nulle.
La variable aléatoire $\frac{X}{\sigma}$ a un écart-type égal à 1.
La variable aléatoire $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ a une espérance nulle et un écart-type égal à 1. On dit que Z est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Valeurs de X et valeurs de Z.

Si X prend ses valeurs entre a et b, $X-m$ prend ses valeurs entre $a-m$ et $b-m$ et $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ prend ses valeurs entre $\dfrac{a-m}{\sigma}$ et $\dfrac{b-m}{\sigma}$.

On a alors, pour toute valeur k de X, $P(X=k)=P\left(Z=\dfrac{k-m}{\sigma}\right)$.

Exemple avec X_n de loi Binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, avec $p\in\,]0,1[$

On a $E(X_n)=np$ et $\sigma(X_n)=\sqrt{np(1-p)}$.

Comme X_n prend ses valeurs entre 0 et n, X_n-np prend ses valeurs entre $-np$ et $n-np$ et $Z_n=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ prend ses valeurs entre $\dfrac{-np}{\sqrt{np(1-p)}}=-\sqrt{\dfrac{np}{1-p}}$ et $\dfrac{n-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\sqrt{\dfrac{n(1-p)}{p}}$.

On a alors, pour tout entier k compris entre 0 et n, $P(X_n=k)=P\left(Z_n=\dfrac{k-m}{\sigma}\right)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

On a $E(Z_n)=0$ et $\sigma(Z_n)=1$.

Visualisation graphique sur la feuille Excel.

Intérêt de centrer et réduire : l'espérance et l'écart-type de Z_n ne dépendent plus de ceux de X_n.

4.b) Loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$

Considérons une variable aléatoire X_n de loi Binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, avec $n=100$ et $p=0,5$, et la variable aléatoire $Z_n=\dfrac{X_n-50}{5}$ centrée réduite associée à X_n.
Construisons le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de Z_n.
Construisons un histogramme associé : à chaque valeur k on fait correspondre un rectangle dont l'aire est égale à $P(X_n=k)=P\left(Z_n=\dfrac{k-50}{5}\right)$ et de base de longueur $\dfrac{1}{5}$ centrée sur $\dfrac{k-50}{5}$.
Les sommets des bâtons, comme les bords supérieurs des rectangles, font apparaître une courbe en cloche, l'aire située sous cette courbe étant voisine de l'aire de la réunion des rectangles.

De Moivre a découvert que cette courbe représente la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On obtiendrait par exemple :

$P(45\leqslant X_n\leqslant 60)=\displaystyle\sum_{k=45}^{60}P(X_n=k)=\sum_{k=45}^{60}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx 0.8467$.

$=P\left(\dfrac{45-50}{5}\leqslant\dfrac{X_n-50}{5}\leqslant\dfrac{60-50}{5}\right)=P(-1\leqslant Z_n\leqslant 2)=\displaystyle\sum_{k=45}^{60}P\left(Z_n=\frac{k-50}{5}\right)$

$\simeq\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\approx 0.8186$.

Conjecture :

Lorsque n devient grand, à p fixé, la largeur des rectangles $\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ est de plus en plus petite.

L'aire correspondant à $P(a\leqslant Z_n\leqslant b)$ semble se rapprocher de l'aire située sous la courbe en cloche, c'est-à-dire de $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Théorème de Moivre-Laplace

THÉORÈME 6
On suppose que pour tout entier n, la variable aléatoire X_n suit la loi Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
On pose $Z_n=\dfrac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée réduite associée à X_n.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a<b$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(a\leqslant Z_n\leqslant b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Définition. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout réel x

DÉFINITION 8
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ si, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a \mathrm{d}b f(x) x = \int_{-}^{a} \mathrm{d}b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} x$.
La fonction f est appelée fonction de densité (ou densité de probabilité) de la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

On a $E(X) = 0$, $Var(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

Conséquence sur la loi de F_n.

Rappelons que $F_n = \frac{X_n}{n}$. On a alors $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

Le théorème de Moivre-Laplace indique alors que, pour n assez grand, $Z_n = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

THÉORÈME 7
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors, pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant U \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

4.c) Lois normales $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

DÉFINITION 9
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ si la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

C'est une loi à densité, en ce sens qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

On a $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$ et $\sigma(X) = \sigma$.

4.d) Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$

DÉFINITION 10
Soient deux réels a et b tels que $a < b$.
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si pour tous réels c et d tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$, on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c {}_{\mathrm{d}d\,f(x)x}$, avec $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ pour tout x dans $[a, b]$.
Ce qui donne $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

Proposition

Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $Y = (b-a)X + a$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$.

Ce résultat montre que l'on peut simuler la loi uniforme sur $[a, b]$ à partir la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On a même un résultat plus général.

Proposition

Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition.
Si F_X est continue et strictement croissante, alors
- $Y = F_X(X)$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
- si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $Z = F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

On peut utiliser ce dernier résultat pour simuler la loi exponentielle.

4.e) Loi exponentielle

Définition.
Soit un réel $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramère λ si pour tous réels c et d tels que $0 \leqslant c < d$, on a : $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$, avec $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour tout $x \geqslant 0$.
Ce qui donne $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$, et en particulier $P(X \leqslant d) = 1 - e^{-\lambda d}$.

5. Méthode de Monte Carlo et applications

Voir [D-M].
La méthode de Monte Carlo peut être définie comme toute technique numérique de résolution de problème au moyen d'un modèle stochastique dans lequel on utilise des nombres aléatoires.
Développée vers 1949, elle est attribuée à John von Neumann et Stanislav Ulam (mathématicien américain. La référence au casino rappelle que la roulette permet de générer des nombres aléatoires.
Elle peut être utilisée pour :
- l'estimation d'une surface
- l'estimation d'une intégrale
- les problèmes de files d'attente
- la gestion des stocks,
- le rendement d'un investissement.

5.a) Estimation d'une aire

Exemple introductif.

Supposons que nous voulions estimer l'aire d'un carré de coté 0,5.

Bien sûr, on sait que cette aire est 0.25. Comment trouver une estimation de ce résultat.

Ce carré $C = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$ est évidemment inclus dans le carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Si l'on place n points aléatoirement dans le carré Ω, certains seront dans C, d'autres non.

Les coordonnées d'un point aléatoire correspondent à deux variables aléatoires indépendantes X et Y de même loi Uniforme sur $[0, 1]$.

On a alors $p = P((X, Y) \in C) = P((0 \leqslant X \leqslant 0.5) \cap (0 \leqslant Y \leqslant 0.5)) = \cdots = 0.5 \times 0.5 =$ aire de C.

Ainsi, lors de l'expérience de Bernoulli "placer un point dans Ω", l'événement A "le point est dans C" a pour probabilité $p =$ aire de C.

Un échantillon de n points, obtenu par n répétition indépendantes de l'expérience, nous fournira alors une estimation f_n de p.

Simulation

Nous devons simuler deux échantillons de taille n de la loi Uniforme sur $[0, 1]$. Le premier donnera les abscisses, le second les ordonnées des n points aléatoires.

Pour chaque point, on regarde s'il est dans C ou pas. On compte le nombre n_C de points dans C puis on obtient $f_n = \dfrac{n_C}{n}$.

Il s'agit de la méthode dite "du rejet"

Cas général

1) Si R est une région de $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, alors on a $P((X, Y) \in R) =$ aire de R. On procède alors comme dans l'exemple précédent.

2) Si R est une région de $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, alors on a $P((X, Y) \in R) = \dfrac{\text{aire de } R}{(b-a)(d-c)}$.

On procède façon analogue, en simulant deux échantillons de taille n de la loi Uniforme sur $[a, b]$ et $[c, d]$.

5.b) Estimation d'une intégrale

Si h est une fonction positive, alors $\int_a^b h(x)\,dx$ est l'aire située sous la courbe représentative de f. On peut donc appliquer l'estimation précédente.

Méthode de l'espérance

On peut estimer l'intégrale $\int_a^b h(x)\,dx$ dès lors que $h = gf$ avec f densité de probabilité.

Considérons une variable aléatoire X de densité f et posons $\widetilde{g}(x) = \begin{array}{c} g(x) \text{ si } x \in [a, b] \\ 0 \text{ sinon} \end{array}$.

On a alors $E\left(\widetilde{g}(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}(x) f(x)\,dx = \int_a^b g(x) f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$.

Le problème est donc d'estimer $E\left(\widetilde{g}(X)\right)$.

A partir d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de taille n de X, on a l'estimateur $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{g}(X_i)$.

Exemple : estimation de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.

Cette intégrale n'est autre que $E(X)$, avec X de loi exponentielle de paramètre 1.

Pour la simulation, on peut utiliser le fait que si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $X = -\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

6. Applications diverses

6.a) Marche aléatoire sur un graphe à trois sommets

Voir exercice 8 de la deuxième liste d'exercices.

Une puce se déplace indéfiniment entre trois points A, B et C.

Au départ (étape 0), elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points.

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant cette suite infinie de déplacements.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement A_n (respectivement B_n et C_n) : « la puce est en A (respectivement B et C) » à l'issue de la n-ème étape, et la probabilité α_n (respectivement β_n et γ_n) de l'événement A_n (respectivement B_n et C_n).

On pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 0$.

L'objectif est de calculer α_n, β_n et γ_n pour tout entier $n \geqslant 0$; autrement dit la probabilité que la puce se retrouve en A, B et C au bout de n déplacements.

A l'aide de la formule des probabilités totales (utilisant des probabilités conditionnelles), on peut démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{2}\gamma_n \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\gamma_n \\ \gamma_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\beta_n \end{cases}$.

Ce qui peut s'écrire matriciellement $X_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = MX_n$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Les termes de la matrice M sont les probabilités de transition d'un point du graphe à un autre. Par exemple, $P(A_{n+1}/A_n) = 0$ et $P(A_{n+1}/B_n) = \frac{1}{2}$.

On démontre alors, par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 0$, $X_n = M^n X_0$.

On est donc ramener au calcul de M^n, ce qui utilise en général la diagonalisation/trigonalisation/... de M.

Sur le cas étudié qui est relativement simple, on ppeut repartir du système et trouver des relations de récurrence vérifiées séparément par chacune des trois suites.

Ici, on a, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\beta_n = \gamma_n$ et $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \alpha_n)$.

L'étude de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$, qui est arithmético-géométrique, conduit à l'expression $\alpha_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$.

On en déduit alors que $\beta_n = \gamma_n = \alpha_{n+1} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$.

Une activité de simulation pour estimer $p = \alpha_N$.

On se fixe une valeur de N, par exemple $N = 10$.

Utiliser le tableur ou la calculatrice pour :

- pour simuler les $N = 10$ déplacements de la puce ;
- répéter $n = 100$ fois les $N = 10$ déplacements ;
- obtenir la fréquence de réalisation de l'événement A_N ;
- comparer avec la probabilité de l'événement A_N.

6.b) Modèle de diffusion d'Ehrenfest

Extrait de [M-B-J] sur http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/45/65/PDF/co24th2.pdf

Le modèle

C'est un modèle de diffusion d'un gaz à travers une paroi proposé par les physiciens Ehrenfest (Mr et Mme) au début du siècle dernier.

Une boite séparée en 2 compartiments A et B contient au total N particules. A chaque top d'une horloge, une particule et une seule, choisie au hasard parmi les N, change de compartiment.

A l'instant initial toutes les particules sont en A.

Dans ce modèle il est important de remarquer plusieurs points :

- la probabilité pour une particule donnée de passer de A à B, ou de B à A est la même, égale à $1/N$;
- cette probabilité ne dépend pas du temps ;
- le comportement d'une particule est indépendant de celui des autres particules.

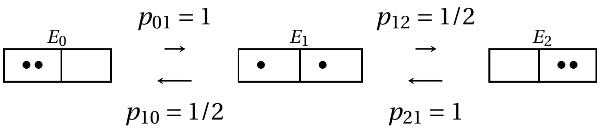
L'objectif

Etudier l'évolution de la répartition des particules au bout d'un grand nombre de déplacements de particules.

Pour les physiciens Ehrenfest l'un des objectifs était de lever le «paradoxe » de l'irréversibilité.

Ils voulaient donc montrer comment, à partir de particules aux évolutions réversibles, on pouvait obtenir, en combinant ces évolutions, une situation macroscopique irréversible.

Un exemple : $N = 2$ particules.

Il y a $N+1 = 3$ états possibles : 

D'où la matrice de transition $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $p_{i,j}$ = probabilité de passer de l'état i et à l'état j.

On peut procéder comme dans l'exemple précédent pour obtenir les probabilités d'être dans chacun des trois états après n déplacements.

La simulation

La simulation peut se réaliser avec le tableur Excel et le langage de programmation associé VBA (visual basic).

Le graphique (nuage de points) et le choix aléatoire de la particule qui va se déplacer (par la fonction ENT(ALEA( )*N+1) peuvent se faire directement sous Excel sans avoir recours à la programmation.

Par contre, pour que la même opération se répète un grand nombre de fois, il est plus pratique de recourir à la programmation (utilisation d'une boucle : For i = 1 to n . . . . .Next i).

L'analyse des résultats

L'irréversibilité

Il semble impossible, en regardant la simulation pour $N = 100$, de revenir à l'état initial (toutes les particules dans le compartiment A).

Le système s'équilibre apparemment autour de la position 50/50.

Cet état d'équilibre paraît encore plus stable pour un nombre de particules plus grand ($N = 1000$).

L'évolution de l'urne d'Ehrenfest est irréversible puisque le système s'équilibre dans un état différent de l'état initial.

On peut remarquer toutefois que, lorsque le nombre de particules est très faible ($N = 2, 3$ . . . . . .) le comportement de l'urne est totalement réversible.

Il faut donc l'accumulation d'un grand nombre de particules réversibles pour créer de l'irréversibilité.

La simulation «tempsretour.xls » permet de constater le comportement réversible de l'urne pour N petit.

Le temps de retour

Un système tel que l'urne d'Ehrenfest possède $N+1$ états, chaque état correspondant au nombre k de particules dans le volume A, $k = 0,...,N$, qui peuvent être choisies de $\binom{N}{k}$ façons.

Ce qui donne $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$ situations possibles pour l'urne, chaque situation ne conduisant pas forcément à un état différent.

Pour un nombre N de particules très grand (ce qui correspond à la réalité), on conçoit aisément, vu le grand nombre de situations possibles, que le retour à l'état initial sera extrêmement rare puisqu'une seule situation conduit à cet état.

Quoiqu'il en soit, on démontre dans l'étude des chaînes de Markov que le retour à l'état initial est quasi-certain pour un tel système.

Nous avons étudié (et simulé informatiquement) le temps de retour pour l'urne d'Ehrenfest. L'espérance du temps de retour à l'état initial pour l'urne d'Ehrenfest est 2^N.

Pour le nombre de particules traitées dans une situation macroscopique le temps de retour est donc quasiment infini à notre échelle (et même par rapport à l'âge de l'univers).
L'irréversibilité apparente de la physique statistique est donc en grande partie due à la différence entre l'échelle de temps de l'observateur et celle du temps de retour.

Conclusion sur l'irréversibilité
L'irréversibilité de l'urne d'Ehrenfest n'est donc qu'une illusion.
D'une part elle dépend du nombre de particules mises en jeu, et d'autre part elle disparaît si le temps d'observation est illimité.
Cependant, pour les situation macroscopiques usuelles (grands nombres de particules, temps d'observation limité), l'urne présente un comportement irréversible.
La plupart des activités proposées permettent d'évaluer le temps de retour pour se convaincre de l'irréversibilité du phénomène.

6.c) Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web (page rank google)

Voir [RIG] sur http ://www.discmath.ulg.ac.be/mam/pratique.html : la matrice cachée de Google

7. Exercices

7.a) Exercices– Série 1

Conditionnement. Indépendance

✯ EXERCICE 57
1) Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.
Démontrer les égalités $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A)\, P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}(B)$.
2) Dans une entreprise, une machine A fabrique 40% des pièces et une machine B fabrique 60% des pièces. Le pourcentage de pièces défectueuses fabriquées par A est de 3%, et par B de 2%. On choisit une pièce au hasard dans la production.
a) Traduire ces données en termes de probabilités d'événements ; les représenter sur un arbre pondéré.
b) Calculer la probabilité que la pièce choisie soit défectueuse.
c) Sachant la pièce choisie défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A ?
3) Mêmes question qu'au 2) avec trois machines A, B et C, fabriquant respectivement 20%, 30% et 50% des pièces, avec des pourcentages de pièces défectueuses respectivement de 5%, 4% et 1%.

✯ EXERCICE 58 ((AVEC UN PEU DE LOI BINOMIALE, ET NORMALE . . .))
1) Soient Ω un univers et P une probabilité associés à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements. On rappelle que $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$.
Démontrer que si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont aussi.
2) Chaque matin de cours (du lundi au vendredi), un étudiant peut être victime de deux événements indépendants : - R : « il n'entend pas son réveil sonner »
- S : « son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».
II a observé que chaque jour de cours, la probabilité de R est égale $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsque qu'au moins l'un des deux événements R ou S se produit, l'étudiant est en retard à l'université ; sinon il est à l'heure.
a) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, l'étudiant entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.
b) Calculer la probabilité que l'étudiant soit à l'heure à l'université un jour de cours donné.
3) Au cours d'une semaine, l'étudiant se rend cinq fois à l'université. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de cours donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où l'étudiant entend le réveil.
a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Justifier votre réponse.
b) Quelle est la probabilité que l'étudiant entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ?
4) On observe le comportement de l'étudiant sur une période de 20 semaines de cours. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 85 et 95 jours où il entende le réveil. On pourra utiliser une loi approchée en justifiant son utilisation.

Loi à densité

✯ EXERCICE 59 (LOI UNIFORME SUR UN INTERVALLE $[a,b]$)

1) a) A l'aide d'un tableur, effectuer 1000 simulations du tirage d'un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0;1]$.

b) Répartir les résultats dans les 10 classes $[0;0.1]$, $]0.1;0.2]$, ..., $]0.9;1]$ et construire l'histogramme des fréquences correspondant (aire des rectangles = fréquence). Que remarque-t-on ? Conjecturer un résultat sur la probabilité qu'un résultat X appartienne à l'une des classes ?

c) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$. Donner l'expression d'une densité de X et calculer $P(X \leqslant x)$ pour $x \in [0;1]$.

2) a) Soit $a = 2$ et $b = 5$. A l'aide d'un tableur, effectuer 1000 simulations du tirage d'un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0;1]$, puis calculer $y = (b-a)x + a$.

b) Répartir les résultats dans les 12 classes $[2;2.25]$, $]2.25;2.50]$, ..., $]4.75;5]$ et construire l'histogramme des fréquences correspondant. Que remarque-t-on ? Conjecturer un résultat sur la probabilité qu'un résultat Y appartienne à l'une des classes ?

c) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a;b]$. Donner l'expression d'une densité de X et calculer $P(X \leqslant x)$ pour $x \in [a;b]$.

3) Virginie a un rendez-vous avec Paul à la sortie de son lycée à 17h00, après son cours de Maths. Mais elle ne pourra l'attendre plus de 5 minutes. Paul, qui suit son cours de Maths dans un autre lycée, estime qu'il peut arriver sur le lieu du rendez-vous à tout moment entre 16h55 et 17h10 de manière équiprobable. Si cette hypothèse est exacte, quelle est la probabilité de Paul rencontre Virginie ?

✯ EXERCICE 60 (LOI EXPONENTIELLE)

1) On rappelle pour une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre λ, on a

$$P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

Démontrer que pour tous réels $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$, on a $P_{T>t}(T > t+h) = P(T > h)$.

2) Une usine fabrique 9000 unités d'un produit en un temps donné. Pour cette même période, la demande concernant ce produit, en milliers d'unités, peut-être considérée comme une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $1/3$.

a) Quelle est la probabilité que la demande dépasse la production ?

b) Quelle devrait être la production pour que cette probabilité soit inférieure à $0,4$?

✯ EXERCICE 61 (LOI NORMALE $\mathcal{N}(0;1)$ ET $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$) 1) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

a) Calculer $P(X \leqslant 2)$ et $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$.

b) Déterminer le réel x tel que $P(X \leqslant x) = 0.975$, puis le réel t tel que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0.95$.

2) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(4;2)$.

a) Calculer $P(X \leqslant 6)$ et $P(0 \leqslant X \leqslant 6)$.

b) Déterminer le réel x tel que $P(X \leqslant x) = 0,975$.

3) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$. Calculer $P\left(X \leqslant \mu+\sigma\right)$, $P\left(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma\right)$, $P\left(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma\right)$ et $P\left(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma\right)$.

✯ EXERCICE 62 (INTERVALLE DE FLUCTUATION)

1) a) A l'aide d'un tableur, effectuer 1000 simulations d'une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}\left(n;p\right)$, avec $n = 100$ et $p = 0.2$. Calculer les valeurs simulées de $Y = \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ et construire un histogramme des fréquences correspondant.

b) Reprendre le travail du a) en prenant $n = 192$ et $p = 0.25$. Que remarque-t-on ? Conjecturer.

2) On admet que si X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n;p\right)$, avec $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n\left(1-p\right) \geqslant 5$, alors $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

En déduire que $P\left(p - \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}1.96 \leqslant F_n \leqslant p + \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}1.96\right) \simeq 0.95$.

7.b) Exercices– Série 2

✯ Exercice 63 (Intervalle de fluctuation et prise décision)
Le responsable de la maintenance des machines à sous d'un casino doit vérifier qu'un certain type de machine est bien réglée sur la probabilité de succès de 0,06. Lors du contrôle d'une machine, il constate qu'elle a fourni 8 succès sur 365 jeux. Doit-il remettre en question le réglage de la machine ?

✯ Exercice 64 (Intervalle de fluctuation et prise de décision)
On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français, le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13%.
Un médecin d'une ville de ce département est surpris par le nombre important d'enfants le consultant pour des crises d'asthmes. Il décide de mener une étude statistique en choisissant de manière aléatoire 100 enfants de 11 à 14 ans de la ville. Il observe que 19 d'entre eux ont déjà eu une crise d'asthmes.
1) Utiliser un intervalle de fluctuation pour aider le médecin à décider s'il y a plus d'enfants ayant des crises d'asthmes dans la ville que dans le département.
2) Le médecin n'est pas convaincu par la décision obtenue et pense que le nombre d'enfants interrogés était insuffisant. Combien d'enfants faudrait-il interroger pour qu'une fréquence observée de 0,19 amène à conclure qu'il y a plus d'enfants ayant des crises d'asthmes dans la ville que dans le département.

✯ Exercice 65 (Comparaison à l'aide de deux intervalles de confiance)
On veut comparer la qualité des sondages réalisés par deux instituts A et B en observant l'exactitude de leurs prévisions durant une année. Les résultats sont donnés ci-dessous :

	A	B
Nombre de prévisions exactes	88	96
Nombre de prévisions fausses	12	24

1) Pour chacun des deux instituts, déterminer un intervalle de confiance de la proportion de prévisions exactes au niveau de confiance 95%.
2) Ces intervalles de confiance permettent-ils de dire que les instituts A et B ont des proportions de prévisions exactes différentes ? Justifier votre réponse.

✯ Exercice 66 (Loi normale et recherche d'un paramètre)
Une entreprise spécialisée dans la production de matériel optique, fabrique des lentilles en grande série. On a mesuré la vergence x, exprimée en dioptries, de 1000 lentilles de même type. On a obtenu la séérie statistique suivante des mesures x_i avec les effectifs correspondant :

x_i	1,975	1,980	1,985	1,990	1,995	2,000	2,005	2,010	2,015	2,020	2,025
n_i	8	27	67	118	176	200	180	122	64	28	10

1) a) Représenter cette série statistique à l'aide d'un diagrammme en bâtons.
b) Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série ; on donnera des valeurs approchée à 10^{-2} près
2) L'allure du diagramme précédent amène à considérer que la vergence d'une lentille, exprimée en dioptries, est une variable aléatoire X de loi normale. Considérons donc que X suit la loi normale & $(2;0,01)$.
a) Comment a-t-on choisi les paramètres de cette loi ?
b) Une lentille est déclarée comme acceptable si sa vergence est comprise entre 1.98 et 2.02. Elle est déclarée defectueuse dans le cas contraire.
Calculer la probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse.
3) Un réglage de la machine permet de modifier l'écart-type sans changer la moyenne.
Considérons donc que X suit la loi normale & $(2;\sigma)$. Déterminer σ pour que la probabilité qu'une lentille choisie au hasard soit défectueuse soit inférieure ou égale à 0,01.

✯ Exercice 67 (Loi normale et recherche de deux paramètres)
La fluorescence de la chlorophylle α en milieu océanique exprimée en millivolts, est une variable aléatoire X de loi normale & (m,σ). Une étude expérimentale a permis d'obtenir les estimations suivantes :

$$P(X \leqslant 37) = 0,9332 \text{ et } P(X \leqslant 23,5) = 0,2266.$$

1) Démontrer que m et σ sont solutions du système $\begin{cases} m + 1,5\sigma = 37 \\ m - 0,75\sigma = 23,5 \end{cases}$.

2) En déduire m et σ.

☆ EXERCICE 68 (LOI NORMALE ET SURBOOKING)
Une liaison aérienne entre deux villes est assurée par un avion de 140 places. La réservation est obligatoire. L'expérience a montré que la probabilité pour qu'une personne confirme sa réservation et retire son billet est égale à 0,8. On suppose que chaque personne se comporte indépendamment des autres.
La compagnie accepte n réservations, avec $n \geqslant 140$. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de réservations confirmées.
1) Justifier que X suit une loi binomiale Préciser son espérance et sa variance.
On admettra pour la suite de l'exercice que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,8n\ ;\ (0,4\sqrt{n})^2\right)$.
2) On cherche le nombre n de réservations que la compagnie peut accepter sachant qu'elle s'accorde un risque de 5% de ne pas pouvoir satisfaire toutes les personnes ayant réservé.
a) Justifier que ce risque se traduit par l'inégalité $P(X \leqslant 140) \geqslant 0,95$.
b) Démontrer que n est solution de l'inéquation $0.8n + 0,658\sqrt{n} - 140 \leqslant 0$.
c) Quel est le nombre maximum de réservations acceptables ?

☆ EXERCICE 69 (DURÉE DE VIE D'UN APPAREIL ET EXTENSION DE GARANTIE) Une entreprise vend des appareils électriques. On admet que la durée de bon fonctionnement de chacun de ces appareils exprimée en mois est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire vérifiant $P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pour tout réel $t \geqslant 0$.
1) Déterminer $P(X > t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.
On suppose que chacun des appareils a une probabilité $p = 0,02$ de tomber en panne durant les 6 premiers mois de son utilisation.
2) a) Déterminer le paramètre λ.
b) Calculer la probabilité $P(X > 8 \,/\, X > 2)$, et comparer avec $P(X > 6)$. Interpréter ce résultat.
3) Cette firme a vendu n appareils. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui tombent en panne pendant les 6 premiers mois de leur utilisation.
Justifier que Y suit la loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.
4) On suppose que $n = 100$ et on utilise le tableur Excel pour obtenir la loi de probabilité de Y.
À voir
On rappelle la syntaxe de la fonction Excel donnant la loi de probabilité Binomiale :

LOI.BINOMIALE(nombre_succès ; tirages ; probabilité_succès ; cumulative).

a) Donner les instructions à écrire dans les cellules B4 et B5, sachant qu'on souhaite recopier ces instructions dans les cellules C4, ..., H4 et C5, ..., H5.
b) Calculer la probabilité de l'événement $Y = 4$, puis celles de $Y < 4$ et $Y \leqslant 4$; on pourra expliquer comment obtenir ces résultats, puis utiliser les résultats de la feuille Excel ci-dessus.
c) L'entreprise envisage de vendre les appareils avec une garantie de 6 mois et pour cela majore de 3 euros le prix de chaque appareil. En revanche, elle assume durant cette période de garantie les réparations (toujours de même nature) estimées à 75 euros. La majoration du prix de vente par appareil suffit-elle à couvrir avec une probabilité supérieure ou égale à 0,90 les frais de réparation entraînés par cette politique de vente dans le cas où $n = 100$?
5) Reprendre la question 4)c) pour $n = 200$.
Complément (hors programme de lycée)
6) La firme a mené une étude statistique afin de modéliser la loi de probabilité de la variable aléatoire Y. Sur 100 lots de 100 appareils, elle a observé le nombre d'appareils tombant en panne (pendant les 6 premiers mois de leur utilisation). Les résultats sont les suivants :

nombre d'appareils en pannes	0	0	0	3	4	5	6
nombre de lots	14	26	27	19	8	5	1

On a alors utilisé le logiciel Excel pour traiter statistiquement ces résultats. Voici un extrait de la feuille de calcul :
À voir
a) Expliquer pourquoi on peut penser que Y pourrait suivre une loi de Poisson. Quel paramètre pourrait-on prendre pour la loi de Poisson ? Cette loi est-elle cohérente avec le résultat du 3) ?
b) Peut-on effectuer directement le test statistique à partir des calculs tels qu'ils sont présentés dans la feuille Excel ci-dessus ? Si non, quelle(s) modification(s) faut-il faire ?

c) Effectuer le test de khi-deux, au risque 5%, pour répondre à la question suivante : peut-on considérer que Y suit une loi de Poisson ?

d) En déduire la probabilité que dans un lot de 100 appareils choisi au hasard, il y ait au maximum un appareil tombant en panne.

☆ EXERCICE 70 (MARCHE ALÉATOIRE SUR UN GRAPHE À TROIS SOMMET) Une puce se déplace indéfiniment entre trois points A, B et C. Au départ (étape 0), elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points.
On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ modélisant cette suite infinie de déplacements.
Pour tout entier naturel n, on considère l'événement A_n (respectivement B_n et C_n) : « la puce est en A (respectivement B et C) » à l'issue de la n-ème étape, et la probabilité α_n (respectivement β_n et γ_n) de l'événement A_n (respectivement B_n et C_n).
On pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ et $\gamma_0 = 0$.
1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements ; en déduire que $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$.
b) Donner, pour tout entier naturel n, les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2) a) Calculer α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2.
b) Exprimer α_{n+1}, β_{n+1} et γ_{n+1} en fonction α_n, β_n et γ_n, pour tout entier naturel n.
c) En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta_n = \gamma_n$ et $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1-\alpha_n)$.
d) En déduire l'expression de α_n, puis de β_n et γ_n, en fonction de n.
e) En déduire la limite de α_n, β_n et γ_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ces résultats.

7.c) Problème

Dans ce document (d'après sujet HEC 2004, math 2, option économique), je vous propose d'étudier une situation de jeu traitant des thèmes *probabilité conditionnelle et indépendance*, avec mise en oeuvre d'un algorithme de simulation du jeu.

Description du jeu. On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de "pile" et de "face" sont équiprobables.
On admet que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \Subset, P)$ que l'on ne cherchera pas à décrire.
Pour tout entier naturel n non nul, le n-ième lancer est appelé *lancer de rang n* et on désigne par F_n l'événement "face apparaît au lancer de rang n" et par $\overline{F_n}$ l'événement "pile apparaît au lancer de rang n"
Deux joueurs J et J' s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :
- le joueur J est gagnant si la configuration "pile, pile, face" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "face, pile, pile" n'apparaisse ;
- le joueur J' est gagnant si la configuration "face, pile, pile" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "pile, pile, face" n'apparaisse ;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant ;
- si aucune des deux configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" n'apparaît, il n'y a pas de gagnant, et les deux joueurs sont perdants.

Simulation. On se propose de mettre en oeuvre un programme permettant, à l'aide d'une calculatrice, de simuler le jeu de "pile ou face" étudié. On considère l'algorithme suivant, dans lequel $random(0;1)$ donne aléatoirement la valeur 0 ou 1, ces deux valeurs étant équiprobables.

Algorithme Quigagne
```
début
x = 0 ; y = 0 ; k = 0 ;
tant que x < 3 et y < 3, faire
    début
    k = k + 1 ; r = random(0;1) ;
    si r = 1, alors début
            si x ⩾ 1, alors x = 2, sinon x = 1 ;
            si y ⩾ 1, alors y = y + 1 ;
            fin
        sinon début
            si x = 2, alors x = 3, sinon x = 0 ;
            y = 1 ;
```

fin

fin

si $x = 3$, alors écrire ('...'), sinon écrire ('...') ;

fin ;

1) Donner sous forme d'un tableau les valeurs prises successivement par les variables x, y et k lors de l'exécution de cet algorithme si les valeurs données à la variable r par $random(0,1)$ sont successivement :

a) 1,1,1,1,0 ; b) 1,0,1,0,0,0,1,1 ; c) 0,1,0,1,0,1,1.

2) Que représente la dernière valeur prise par la variable k dans l'algorithme ci-dessus, et quel texte pourrait-on substituer aux pointillés dans la dernière instruction ? Qu'afficherait alors la calculatrice dans les trois exemples de la question 1) ?

3) Ecrire un programme, correspondant à l'algorithme ci-dessus, utilisable sur votre calculatrice.

Une ébauche d'étude probabiliste du jeu

4) Y a-t-il toujours un gagnant ?

a) La condition de sortie du "tant que" est-elle toujours vérifiée à un moment donné ?

b) Effectuer la simulation de 100 parties de ce jeu et indiquer la fréquence de parties gagnées par J, de parties gagnées par J', de parties sans gagnant.

c) On peut démontrer que lors d'une partie, la probabilité qu'il y ait un gagnant est égale à 1. Ce résultat est admis au niveau du lycée mais peut être démontré (voir complément 1 ci-après).

5) Le jeu est-il équitable ?

a) Représenter sur un arbre pondéré les résultats possibles des 4 premiers lancers.

b) Quelle hypothèse de l'énoncé assure l'indépendance des résultats des lancers ?

c) En est-il de même si on arrête les lancers dès qu'il y a un gagnant ? Comment interpréter alors les probabilités figurant sur l'arbre pondéré précédent ?

d) Considérant uniquement les 4 premiers lancers, les 2 joueurs ont-ils autant de chance de gagner ?

6) Probabilité de gain de chacun des 2 joueurs.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par G_n l'événement "le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n".

a) Calculer $P(G_3)$ et $P(G_4)$.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Quelle doit être la suite des résultats de n premiers lancers pour que le joueur J soit déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n ? En déduire que $P(G_n) = \frac{1}{2^n}$.

c) En déduire la probabilité p_n que J soit gagnant au plus tard à l'issue du lancer de rang n. On vérifiera que $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$.

d) Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

e) On admet que la probabilité de gain de J est égale à $\frac{1}{4}$. Quelle est la probabilité de gain de J' ? Conclure.

Complément 1 (hors programme). *On se propose de montrer que dans ce jeu, il y a toujours un gagnant.*

7) Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par D_n l'événement "lors des n premiers lancers, n'apparaissent jamais deux piles consécutifs", par d_n la probabilité de D_n.

a) Justifier les égalités $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$.

b) En considérant les résultats des lancers de rang 1, 2 et 3, calculer d_3.

c) A l'aide de la formule des probabilités complètes et des événements F_{n+2} et $F_{n+1} \cap \overline{F_{n+2}}$, établir l'égalité :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

d) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β (que l'on ne déterminera pas) telles que

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } d_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n.$$

e) En déduire que la série de terme général d_n converge.

f) Pour tout entier naturel N non nul, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} d_n$. Etablir l'égalité :

$$\text{pour tout entier naturel } N \text{ non nul, } S_{N+2} = \frac{1}{2}S_{N+1} + \frac{1}{4}S_N + \frac{5}{4}.$$

g) En déduire l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

8) On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

Pour tout entier naturel n non nul, l'événement $[T=0]\cup[T>n]$ est donc réalisé si et seulement si aucune des deux configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" n'est apparue au cours des n premiers lancers.

a) Calculer la probabilité des événements $[T=1]$, $[T=2]$ et $[T=3]$.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Justifier l'égalité :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 2,\ P([T=0]\cup[T>n])=\frac{1}{2^n}+d_n.$$

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Donner une relation entre les événements $[T=n]$, $[T>n-1]$ et $[T>n]$. En déduire l'égalité :

$$\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 3,\ P([T=n])=\frac{1}{2^n}+d_{n-1}-d_n.$$

d) Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} P([T=n])$, et montrer que la probabilité que le jeu se termine par la victoire de l'un des joueurs est égale à 1.

Complément 2 (hors programme). *On se propose d'établir le paradoxe de Walter Penney : les temps d'attente des configurations "pile, pile, face" et "face, pile, pile" (c'est-à-dire les temps d'attente des gains de J et J') suivent la même loi alors que le jeu est inéquitable.*

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un "face" précédé de deux "piles" si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît pas.

Soit Y' la variable aléatoire désignant le rang du lancer où pour la première fois apparaît un "pile" précédé d'un "pile" lui-même précédé d'un "face" si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si celle-ci n'apparaît pas.

Par exemple, si les résultats des premiers lancers donnent (face, face, pile, face, pile, face, pile, pile, face, ...), la variable aléatoire Y prend la valeur 9 et la variable Y' prend la valeur 8.

On pose $c_1=c'_1=c_2=c'_2=0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $c_n=P([Y=n])$ et $c'_n=P([Y'=n])$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on désigne par B_n l'événement $\overline{F_{n-2}}\cap\overline{F_{n-1}}\cap F_n$ et par B'_n l'événement $F_{n-2}\cap\overline{F_{n-1}}\cap\overline{F_n}$.

9) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, les probabilités des événements B_n et B'_n sont égales à $\frac{1}{8}$.

10) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Comparer les événements $[Y\leqslant n]$ et $B_3\cup B_4\cup\cdots\cup B_n$. Comparer de même les événements $[Y'\leqslant n]$ et $B'_3\cup B'_4\cup\cdots\cup B'_n$.

11) On pose $u_1=u'_1=u_2=u'_2=0$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $u_n=P(B_3\cup B_4\cup\cdots\cup B_n)$ et $u'_n=P(B'_3\cup B'_4\cup\cdots\cup B'_n)$.

a) Vérifier que les événements B_3, B_4 et B_5 sont deux à deux disjoints, et que les événements B'_3, B'_4 et B'_5 sont deux à deux disjoints.

b) En déduire les valeurs des nombres u_3, u_4 et u_5.

12) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

a) Que peut-on dire des événements B_{n-1}, B_n et B_{n+1} d'une part, et des événements B'_{n-1}, B'_n et B'_{n+1} d'autre part ?

b) Montrer que l'événement $[Y\leqslant n+1]$ est la reunion disjointe des deux événements $[Y\leqslant n]$ et $[Y>n]\cap B_{n+1}$.

c) En déduire l'égalité : $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{8}(1-u_{n-2})$.

On démontrerait de même (ne pas le faire) l'égalité : $u'_{n+1}=u'_n+\frac{1}{8}(1-u'_{n-2})$.

13) a) Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n non nul, les nombres u_n et u'_n sont égaux.

b) Montrer que les variables aléatoires Y et Y' suivent la même loi de probabilité.

8. Références

Références - Ouvrages

[CHV] Gérard Chauvat et al, Mathématiques BTS/DUT, Probabilités et statistique

[C-T] Hubert Carnec et Marc Thomas, Itinéraires en Statistiques & Probabilités

[D-M] Yadolah Dodge et Giuseppe Melfi, Premiers pas en simulation

Références - En ligne

[M-B-J] Alain Marie-Jeanne, Frédéric Beau, Michel Janvier - Simulation de l'urne d'Ehrenfest - http ://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/45/65/PDF/co24th2.pdf

[RIG] Michel Rigo - La matrice cachée de Google - http ://www.discmath.ulg.ac.be/mam/pratique.html

[SN] St@tNet - Les techniques de la statistique - http ://www.agro-montpellier.fr/cnam-lr/statnet/index.htm