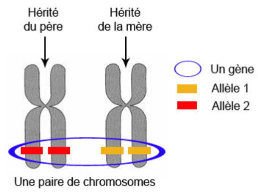
Probabilité et génétique dans le cours de terminale S :



On s'intéresse à un gène à deux allèles, A et a. Chaque gène se trouve en deux exemplaires, un individu peut donc être de l'un des trois génotypes : A/A, A/a ou a/a.

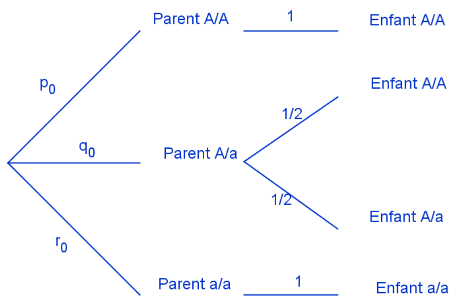
Un individu a/a nait malade.

On considère une population dont les proportions respectives de ces trois génotypes sont p_0, q_0 et r_0 et on étudie le génotype d'un enfant issu de cette population.

1. On suppose que l'un des deux parents est de génotype A/A.

a. Quelle est la probabilité p'_1 que l'enfant soit de génotype A/A ?

b. Quelle est la probabilité q'_1 que l'enfant soit de génotype A/a ?



Les probabilités sont obtenues à l'aide d'échiquiers de croisement du type :

	A	a
A	A/A	A/a
A	A/A	A/a

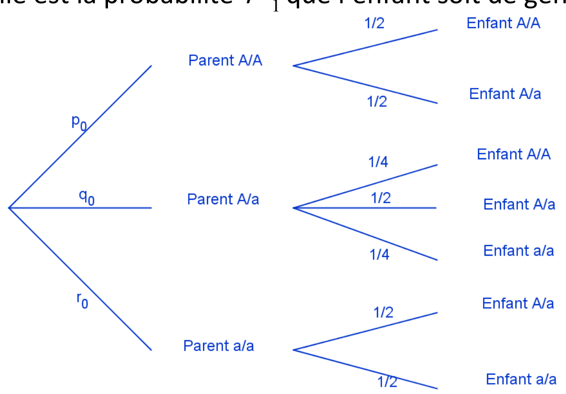
Donc : $p'_1 = p_0 + \frac{1}{2}q_0$ et $q'_1 = \frac{1}{2}q_0 + r_0$

2. On suppose que l'un des deux parents est de génotype A/a.

a. Quelle est la probabilité p''_1 que l'enfant soit de génotype A/A ?

b. Quelle est la probabilité q''_1 que l'enfant soit de génotype A/a ?

c. Quelle est la probabilité r''_1 que l'enfant soit de génotype a/a ?



Donc : $p''_1 = \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{4}q_0$, $q''_1 = \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}r_0$

et $r''_1 = \frac{1}{4}q_0 + \frac{1}{2}r_0$

3. a. On note p_1 la probabilité qu'un enfant de première génération ait le génotype A/A. Déterminer p_1 en fonction de p_0 et q_0.

On applique la formule des probabilités totales: $p(A_1 \cap A_2) = p_{B_1}(A_1) \times p(B_1) + p_{B_2}(A_2) \times p(B_2)$

$$p_1 = p'_1 \times p_0 + p''_1 \times q_0 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)p_0 + \left(\frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{4}q_0\right)q_0 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

b. On note r_1 la probabilité qu'un enfant de première génération ait le génotype a/a. Déterminer r_1 en fonction de r_0 et q_0.

On démontre de même que : $r_1 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$.

c. En déduire la probabilité q_1 la probabilité qu'un enfant de première génération ait le génotype A/a.

$$q_1 = 1 - p_1 - q_1 = 1 - \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2 - \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2.$$

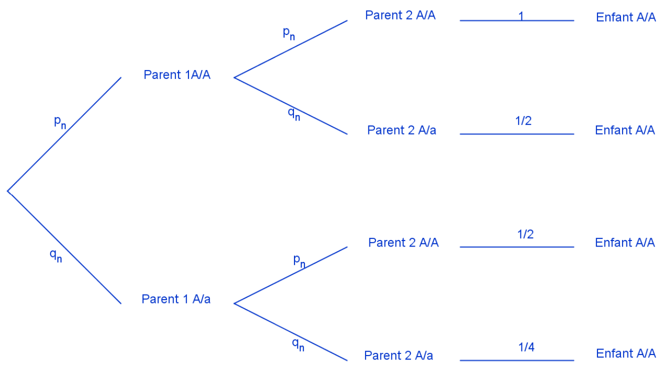
4. On note p_n, q_n et r_n les proportions respectives des trois génotypes à la n[ème] génération.

a. Déterminer la probabilité p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

b. Déterminer la probabilité r_{n+1} en fonction de r_n et q_n.

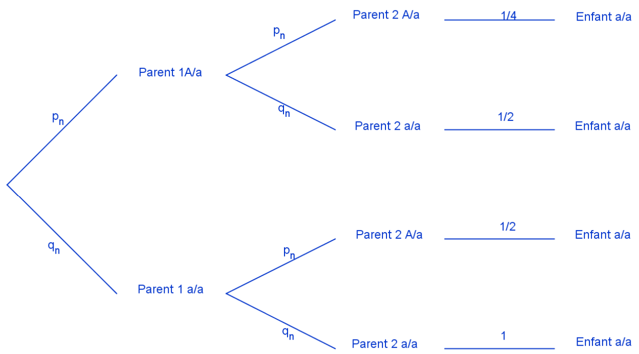
c. En déduire la probabilité q_n en fonction de p_n, q_n et r_n.

a.



$$p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2}p_n q_n + \frac{1}{2}q_n p_n + \frac{1}{4}q_n^2$$
$$= p_n^2 + p_n q_n + \frac{1}{4}q_n^2$$
$$= \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2$$

b.



$$p_{n+1} = \frac{1}{4}q_n^2 + \frac{1}{2}q_n r_n + \frac{1}{2}r_n q_n + r_n^2$$
$$= \frac{1}{4}q_n^2 + r_n q_n + r_n^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2$$

c. $q_n = 1 - (p_n + r_n) = 1 - \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2 - \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2$

5. a. À l'aide d'un tableur calculer les premiers termes des suites (p_n), (q_n) et (r_n).

b. Faire varier les valeurs de p_0, q_0 et r_0. Quelle conjecture peur-on émettre ?

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	p_0	0,5		n	p_n	q_n	r_n		p_n-r_n
	q_0	0,2		0	0,5	0,2	0,3		0,2
	r_0	0,3		1	0,36	0,48	0,16		0,2
				2	0,36	0,48	0,16		0,2
				3	0,36	0,48	0,16		0,2
				4	0,36	0,48	0,16		0,2
				5	0,36	0,48	0,16		0,2
				6	0,36	0,48	0,16		0,2
				7	0,36	0,48	0,16		0,2
				8	0,36	0,48	0,16		0,2
				9	0,36	0,48	0,16		0,2
				10	0,36	0,48	0,16		0,2

Il semblerait que, à partir de la génération 1 les probabilités soient constantes mais qu'elles dépendent des valeurs initiales.

6. Démonstration de la conjecture :

a. Montrer que la suite $(p_n - r_n)$ est constante.

b. En déduire que la suite (p_n) est constante.

c. Donner les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de p_0 et r_0.

a. Soit *n* un entier naturel.

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2 - \left(\frac{1}{2}q_n + r_n\right)^2 = p_n{}^2 + q_n\left(p_n - r_n\right) - r_n{}^2$$

$$= \left(p_n - r_n\right)\left(p_n + r_n\right) + q_n\left(p_n - r_n\right) = \left(p_n - r_n\right)\left(p_n + r_n + q_n\right) = \left(p_n - r_n\right)$$

Donc $(p_n - r_n)$ est une suite constante égale à $k = p_0 - r_0$.

b. Soit *n* un entier naturel.

On a donc $r_n = k - p_n$ .Donc $q_n = 1 - p_n - r_n = 1 - 2p_n + k$

D'où $p_{n+1} = \left(p_n + \frac{1}{2}q_n\right)^2 = \left(p_n + \frac{1}{2} - p_n + \frac{1}{2}k\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)^2 = \frac{1}{4}\left(p_0 - r_0 + 1\right)^2$ donc la suite (p_n) est constante.

c. $p_n = \frac{1}{4}\left(p_0 - r_0 + 1\right)^2$.

$$r_n = p_n - k = \frac{1}{4}\left(p_0 - r_0 + 1\right)^2 - \left(p_0 - r_0\right)$$

$$q_n = 1 - 2 \times \frac{1}{4}\left(p_0 - r_0 + 1\right)^2 + k = 1 - \frac{1}{2}\left(p_0 - r_0 + 1\right)^2 + p_0 - r_0$$