# Probabilités et statistiques
# Echantillonnage avec loi binomiale et loi normale
# Eléments de correction

## 1 En classe de seconde : intervalle de fluctuation

On utilise l'intervalle de fluctuation au seuil de 5% pour conclure : $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Pour la Chine, $p = 0,5$, $n = 20$ et $f = \frac{16}{20}$ ; pour le Canada, $p = 0,5$, $n = 132$ et $f = \frac{46}{132}$.

## 2 En classe de première : loi binomiale

1. On répète $n = 200$ fois et de manière indépendante l'épreuve "avoir un enfant", avec une probabilité $p = 0,58$ d'avoir un garçon.
2. *utilisation sur tableur de LOI.BINOMIALE(k ;n ;p) et pour le cumul LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;VRAI) ou CRITERE.LOI.BINOMIALE(n ;p ;alpha)*

| k | P(X=k) | P(X<=k) |
|---|---|---|
| 96 | 0,00098795 | 0,00275215 |
| 97 | 0,00146277 | 0,00421492 |
| 98 | 0,00212308 | 0,006338 |
| 99 | 0,00302071 | 0,00935872 |
| 100 | 0,00421318 | 0,01357189 |
| 101 | 0,00576059 | 0,01933249 |
| 102 | 0,00772113 | 0,02705361 |
| 103 | 0,01014491 | 0,03719853 |
| 104 | 0,01306669 | 0,05026521 |
| 105 | 0,0164978 | 0,06676301 |
| 106 | 0,02041844 | 0,08718145 |
| 107 | 0,0247711 | 0,11195255 |
| 108 | 0,02945664 | 0,14140919 |
| 109 | 0,03433391 | 0,1757431 |
| 110 | 0,03922389 | 0,21496699 |
| 111 | 0,04391864 | 0,25888562 |
| 112 | 0,04819473 | 0,30708035 |
| 113 | 0,05183015 | 0,35891051 |
| 114 | 0,05462301 | 0,41353351 |
| 115 | 0,05640984 | 0,46994336 |
| 116 | 0,05708139 | 0,52702475 |
| 117 | 0,05659352 | 0,58361826 |
| 118 | 0,05497199 | 0,63859025 |
| 119 | 0,05231028 | 0,69090053 |
| 120 | 0,04876065 | 0,73966119 |
| 121 | 0,04451976 | 0,78418095 |
| 122 | 0,03981061 | 0,82399156 |
| 123 | 0,03486318 | 0,85885474 |
| 124 | 0,02989611 | 0,88875086 |
| 125 | 0,02510135 | 0,9138522 |
| 126 | 0,02063319 | 0,9344854 |
| 127 | 0,01660249 | 0,95108788 |
| 128 | 0,01307569 | 0,96416358 |
| 129 | 0,01007828 | 0,97424185 |
| 130 | 0,00760116 | 0,98184301 |
| 131 | 0,005609 | 0,98745201 |
| 132 | 0,00404892 | 0,99150093 |
| 133 | 0,00285874 | 0,99435968 |

   (a) – $a = 102$ ;
       – $b = 130$.

   (b) L'intervalle de fluctuation à 95% $J = \left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$ obtenu grâce à la loi binomiale est $[\ 0,51\ ;\ 0,65\ ]$. En outre, l'intervalle $I = \left[\ p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\ \right]$ est $[\ 0,509\ ;\ 0,651\ ]$.

3. Ici la fréquence observée est $f = \frac{126}{200}$. On a $f \in J$ : au seuil de 5 % d'erreur, on peut accepter l'hypothèse de départ, à savoir $p = 0,58$.

## 3 En classe de terminale : loi normale

1. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ admet une moyenne de 0 (centrée) et un écart-type de 1 (réduite), elle suit la loi normale centrée réduite. Notons que $\mu = n \times p$ (moyenne de la binomiale) et que $\sigma^2 = np(1-p)$ (variance de la binomiale).

2. Utilisation sur tableur de $LOI.NORMALE(x;\mu;\sigma;VRAI)$ qui donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(t-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dt$. Attention à bien préciser la valeur cumulative sur VRAI. Sur FAUX, elle renvoie la valeur de la fonction de densité en $x$.

   Utilisation sur tableur de $LOI.NORMALE.INVERSE(valeurproba;\mu;\sigma)$ qui donne la valeur de $x$ pour laquelle $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(t-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dt = valeurproba$.

| k | P(X<=k) |
|---|---|
| 97 | 0,00324373 |
| 98 | 0,00495714 |
| 99 | 0,00743479 |
| 100 | 0,01094492 |
| 101 | 0,01581691 |
| 102 | 0,02244199 |
| 103 | 0,03126824 |
| 104 | 0,04278851 |
| 105 | 0,05752009 |
| 106 | 0,07597604 |
| 107 | 0,09862898 |
| 108 | 0,12586939 |
| 109 | 0,15796194 |
| 110 | 0,19500408 |
| 111 | 0,23689209 |
| 112 | 0,2832992 |
| 113 | 0,33367016 |
| 114 | 0,38723459 |
| 115 | 0,44303961 |
| 116 | 0,5 |
| 117 | 0,55696039 |
| 118 | 0,61276541 |
| 119 | 0,66632984 |
| 120 | 0,7167008 |
| 121 | 0,76310791 |
| 122 | 0,80499592 |
| 123 | 0,84203806 |
| 124 | 0,87413061 |
| 125 | 0,90137102 |
| 126 | 0,92402396 |
| 127 | 0,94247991 |
| 128 | 0,95721149 |
| 129 | 0,96873176 |
| 130 | 0,97755801 |
| 131 | 0,98418309 |
| 132 | 0,98905508 |
| 133 | 0,99256521 |
| 134 | 0,99504286 |

   (a) $A = 103$ et $B = 130$.

   (b) On obtient $K = \left[\ \dfrac{A}{n}\ ;\ \dfrac{B}{n}\ \right] = [\ 0,515\ ;\ 0,65\ ]$.

3. Ici la fréquence observée est $f = \dfrac{126}{200}$. On a $f \in K$ : au seuil de 5 % d'erreur, on peut accepter l'hypothèse de départ, à savoir $p = 0,58$.

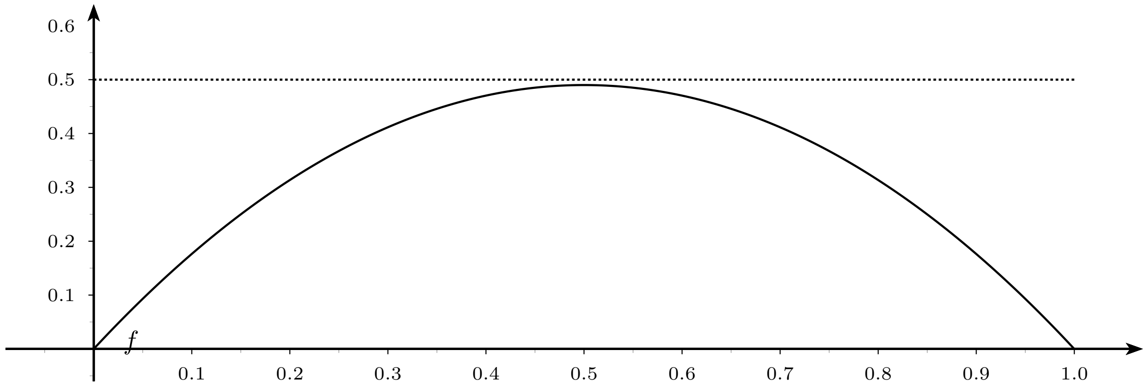
4. Pour la loi normale centrée réduite, on a $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$. Une transformation affine permet de passer de $Z$ à $X = \sigma Z + \mu$.

5. Pour la loi normale centrée réduite, on a $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$. Une transformation affine permet de passer de $Z$ à $X = \sigma Z + \mu$. Le nouvel intervalle de fluctuation, à 1% cette fois, sera $L = \left[\ \dfrac{-2,58\sigma + \mu}{n}\ ;\ \dfrac{2,58\sigma + \mu}{n}\ \right]$.

## 4 En classe de terminale : loi binomiale et intervalle de fluctuation

1. On répète $n = 200$ fois et de manière indépendante l'épreuve "avoir un enfant", avec une probabilité $p = 0,58$ d'avoir un garçon.

2. $\mu = n \times p = 116$ ; $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6,9799135$. On considère que la population est suffisammment importante pour que les résultats de cette loi binomiale tendent vers ceux de la loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma^2$ (théorème de Moivre-Laplace).
3. La variable aléatoire $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ suit ainsi la loi normale centrée réduite.
4. $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ (valeurs à connaître).
5. Il suit, par transformation affine $X = \sigma Z + \mu$, que $P\left(-1,96\sqrt{np(1-p)} + np \leq X \leq 1,96\sqrt{np(1-p)} + np\right) = 0,95$.
6. $F_n \in \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité de 95% (intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 1-0,05).
7. La fonction $t \to 1,96\sqrt{t(1-t)}$ est majorée par 0,5 sur l'intervalle $[0;1]$.




d'où $\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

8. On retrouve l'intervalle de fluctuation vu en seconde, qui est moins précis car contenant l'intervalle de fluctuation asymptotique.