Autres exercices sur la loi normale

Exercice 1 :

On a étudié le taux de glycémie d'une population d'individus présentant certaines caractéristiques précises ; on a obtenu les résultats suivants : 20% des glycémies sont inférieures à $0{,}82$ g/L et 30% des glycémies sont supérieures à $0{,}98$ g/L. Si on suppose que la glycémie des individus présentant ces caractéristiques suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart-type de cette loi.

Eléments de correction :

Soit X la glycémie d'un individu tiré au hasard dans la population étudiée. X suit une loi $\mathcal{N}(m;\ \sigma^2)$.

$P(X < 0{,}82) = 0{,}20 = \Pi\left(\frac{0{,}82-m}{\sigma}\right)$ *d'où* $\frac{0{,}82-m}{\sigma} = -0{,}8416$

$P(X > 0{,}98) = 0{,}30 = 1 - \Pi\left(\frac{0{,}98-m}{\sigma}\right)$ *d'où* $\frac{0{,}98-m}{\sigma} = 0{,}5244$

De ces deux équations à deux inconnues, on tire : $m \approx 0{,}9186$ et $\sigma \approx 0{,}1171$

Exercice 2 :

Une usine utilise une machine automatique pour remplir des flacons contenant un certain produit en poudre. Par suite de variations aléatoires dans le mécanisme, la masse de poudre par flacon est une variable aléatoire de loi normale de moyenne m et décart-type $1{,}1$ mg. Les flacons sont vendus comme contenant 100 mg de produit.

1. *La machine est réglée sur $m = 101{,}2$ mg. Quelle est la probabilité que la masse de produit dans un flacon soit inférieure à la masse annoncée ?*
2. *Sur quelle valeur de m faut-il régler la machine pour qu'au plus 4% des flacons aient une masse inférieure à la masse annoncée ?*

Eléments de correction :

1. *X suit la loi $\mathcal{N}(101{,}2\ ;\ 1{,}1^2)$.* $P(X < 100) = \Pi\left(\frac{100-101{,}2}{1{,}1}\right) = \Pi(-1{,}09) = 0{,}1379$
2. *X suit la loi $\mathcal{N}(m\ ;\ 1{,}1^2)$.* $P(X < 100) \leq 0{,}04$ *soi t* $\Pi\left(\frac{100-m}{1{,}1}\right) \leq \Pi(-1{,}7507)$ *d'o ù* $\frac{100-m}{1{,}1} \leq -1{,}7507$ *c'est-à-dire* $m \geq 101{,}926$

Exercice 3 :

On admet que la longueur du pied d'un homme adulte suit une loi normale de moyenne 24 cm et d'écart-type 3 cm. Un fabricant de chaussettes étudie cette loi pour programmer sa production de chaussettes en taille et en quantité. Il décide de répartir sa production selon cinq tailles numérotées de 1 à 5 de la façon suivante : il prend un intervalle symétrique autour de la moyenne, de probabilité $0{,}90$; il divise cet intervalle en trois intervalles de même amplitude correspondant aux tailles 2, 3 et 4. Il obtient donc ainsi ses cinq tailles.

1. *Déterminer les longueurs de pied qui délimitent ces cinq intervalles.*
2. *Quelle est la part en pourcentage de la production totale à affecter respectivement à chacune des cinq tailles ?*

Eléments de correction :

1. *X suit la loi $\mathcal{N}(24\ ;\ 3^2)$. On cherche a tel que $P(24 - a < X < 24 + a) = 0{,}90$*
   On a $2\Pi\left(\frac{a}{3}\right) - 1 = 0{,}90$ *d'où* $\frac{a}{3} = 1{,}6449$. *Tailles entre (environ) $24 - 1{,}65 \times 3$ et $24 + 1{,}65 \times 3$*
   d'où : Taille 1 : inférieure à $19{,}05$; Taille 2 : entre $19{,}05$ et $22{,}35$; Taille 3 : entre $22{,}35$ et $25{,}65$; Taille 4 : entre $25{,}65$ et $28{,}95$; Taille 5 : supérieure à $28{,}95$
2. *Pour la taille 3 :* $P\left(24 - \frac{a}{3} < X < 24 + \frac{a}{3}\right) = P\left(-\frac{a}{9} < T < \frac{a}{9}\right) = 2\Pi\left(\frac{a}{9}\right) - 1 = 2 \times 0{,}7081 - 1 = 0{,}416$
   Taille 1 : $\approx 5\%$; Taille 2 : $\approx 24\%$; Taille 3 : $\approx 42\%$; Taille 4 : $\approx 24\%$; Taille 5 : $\approx 5\%$

Exercice 4 :

On note p la proportion des individus d'une population atteints d'une maladie M. On extrait par tirage au sort un échantillon de 100 individus de la population. On constate que sur ces 100 individus, 15 sont atteints de la maladie M.

1. *Donner un intervalle de confiance pour p au seuil $0{,}01$.*
2. *Avec cette observation, à quel seuil faudrait-il travailler pour obtenir un intervalle de confiance pour p de longueur $0{,}10$?*

Eléments de correction :

1. $I_\alpha(p) = \left[f_n - t_\alpha\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}\ ;\ f_n + t_\alpha\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}\right]$ *avec* $n = 100$, $f_n = 0{,}15$ *et* t_α *tel que* $P(-t_\alpha \le T \le t_\alpha) = 1 - \alpha$
   avec $t_{0,01} = 2{,}5758$
   D'où : $I_\alpha(p) = [0{,}15 - 0{,}092\ ;\ 0{,}15 = 0{,}092] = [0{,}058;\ 0{,}242]$
2. $I_\alpha(p)$ *a pour longueur* $2t_\alpha\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}}$ *don c* $2t_\alpha\sqrt{\frac{f_n(1-f_n)}{n}} = 0{,}10$ *d'où* $t_\alpha = 1{,}40$
   $P(-t_\alpha \le T \le t_\alpha) = 1 - \alpha = 2\Pi(t_\alpha) - 1$ *d'où* $\alpha = 2 - 2 \times 0{,}9192 = 0{,}1616$

Exercice 5 :

Un psychologue s'intéresse au temps de réaction à un stimulus chez des enfants atteints d'une certaine affection. Il considère comme acquis que ce temps de réaction suit une loi normale de moyenne m *et d'écart-type* $\sigma = 0{,}10$ *s. Il étudie un échantillon tiré au hasard de* 16 *enfants malades et mesure pour chacun d'eux son temps de réaction. Il trouve sur cet échantillon un temps moyen* $\bar{x} = 1{,}1$ *s. donner un intervalle de confiance pour le paramètre* m *d'après l'observation de et échantillon.*

- **a.** *au seuil de* $0{,}05$
- **b.** *au seuil de* $0{,}01$

Eléments de correction :

X *suit la loi* $\mathcal{N}(m\ ;\ 0{,}10^2)$ *;* $n = 16$ *et* $\bar{x} = 1{,}1$

$I_\alpha(m) = \left[\bar{x} - t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ *et* $P(-t_\alpha \le T \le t_\alpha) = 1 - \alpha = 2\Pi(t_\alpha) - 1$ *d'o ù* $\Pi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

- **a.** *si* $\alpha = 0{,}05$ *alor s* $t_\alpha = 1{,}96$ *;* $I_{0,05}(m) = [1{,}051\ ; 1{,}149]$
- **b.** *si* $\alpha = 0{,}01$ *alor s* $t_\alpha = 2{,}5758$ *;* $I_{0,01}(m) = [1{,}035\ ; 1{,}165]$

Exercice 6 :

Des mesures du diamètre apparent vertical de la planète Vénus ont donné, en secondes d'arc, les résultats suivants :

$42{,}70$; $43{,}01$; $42{,}76$; $43{,}63$; $41{,}60$; $42{,}95$; $43{,}18$; $43{,}10$; $42{,}56$; $43{,}48$; $43{,}06$; $42{,}87$; $42{,}78$; $43{,}20$; $43{,}39$

Soit X *la variable aléatoire représentant les résultats de la mesure du diamètre vertical de Vénus, mesure rendue aléatoire par le fait de nombreux phénomènes annexes intervenant dans la pratique de cette mesure. Compte tenu du grand nombre de causes diverses d'erreur de mesure, il est raisonnable de considérer que* X *suit une loi normale* $\mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$.

1. *Donner un intervalle de confiance pour* m *d'après l'échantillon de mesures obtenu, au seuil de* $0{,}05$ *en supposant que* $\sigma = 0{,}5$.
2. *Combien de mesures faudrait-il avoir, au minimum, pour obtenir à ce même seuil un intervalle de confiance pour* m *de longueur maximale* $0{,}10$ *?*

Eléments de correction :

On trouve pour cet échantillon de taille $n = 15$ *une moyenne observée* $\bar{x} = 42{,}95$. X *suit la loi* $\mathcal{N}(m\ ; 0{,}5^2)$.

1. $I_\alpha(m) = \left[\bar{x} - t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ *avec* $\alpha = 0{,}05$ *donc* $t_\alpha = 1{,}96$
   $I_{0,05}(m) = [42{,}697\ ; 43{,}203]$
2. *Longueur de l'intervalle :* $2t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0{,}10$ *d'où :* $\sqrt{n} \ge \frac{2\times1{,}96\times0{,}5}{0{,}10}$ *soit* $n \ge 384{,}16$
   Il faudrait donc avoir au minimum 385 *mesures*