Probabilités - Exercices divers

Exercice 0

On s'aide d'un arbre :
- $P(I) = 0,02$: les personnes contrôlées par la police sont en état d'ébriété ;
- $P_I(A) = 0,95$: l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété ;
- $P_{Non(I)}(A) = 0,05$: l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. $P(A \cap I) = 0,02 \times 0,95$.

2. $P_A(I) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(A)}$.

Exercice 1

Y suit la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$.

Exercice 2

1. Si N désigne le nombre de contrôles dans une année, N suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,3$ et $n = 15$.

$$P(5 \leq N \leq 8) = P(N \leq 8) - P(N \leq 4) = 0,9842 - 0,5155 = 0,4687.$$

2. Henri va économiser $1,50 \times 15 = 22,50$ euros : il faut au moins deux amendes. La probabilité cherchée est donc $P(N \geq 2) = 1 - P(N \leq 1) = 0,9647$.

Exercice 3

1. La moyenne est $\dfrac{1}{\lambda} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$, soient 2 heures.

2. Une intégration donne $P(T < a) = 1 - \mathrm{e}^{-0,5a}$ et $P(T > b) = \mathrm{e}^{-0,5b}$.
On a $P(T < 0,25) = 0,118$; $P(T > 2) = 0,368$; $P(T > 0,75) = 0,687$ et $P(0,2 < T < 1,5) = 0,432$.

3. On cherche $P_{T \geq 0,75}(T \leq 2) = P(0 \leq T \leq 1,25)$ (loi sans vieillissement).

4. **a.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = P(T \leq 0,5) = 0,221$.

b. $1 - P(X = 0) = 1 - 0,779^6$.

5. $P(X \leq 4)$.

Exercice 4

Si X désigne la note obtenue au concours, $Z = \dfrac{X - 11}{3}$ suit la loi normale centrée réduite.
Or, $InvNorm(0.3) = -0.5244$, donc la barre était à $11 + 3 \times (-0.5244) = 9,4268$.

Exercice 5

1. Si N désigne le nombre de contrôles dans une année, N suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,05$ et $n = 800$, que l'on peut approcher par la loi normale de moyenne $m = n \times p = 40$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{38}$.

$$P(50 \leq N \leq 60) = P(N \leq 60) - P(N \leq 50) = 0,0518$$

2. Henri va économiser $1,50 \times 800 = 1200$ euros : il faut au moins soixante amendes. La probabilité cherchée est donc $P(N \geq 60) = 1 - P(N \leq 60) = 0,0006$.

Exercice 6

1. $Z = \dfrac{N-50}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. Or $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95 = P(48 \leq N \leq 52)$. Ainsi $\sigma = \dfrac{2}{1,96} = 1,02$.
2. $X = \dfrac{\Sigma N_i}{40}$ suit encore la loi normale de moyenne $\dfrac{\Sigma m_i}{40} = 50$ et d'écart-type $\dfrac{\Sigma \sigma_i}{40} = 1,02$ (somme de lois normales indépendantes).