Cours probabilités programme de TS rentrée 2012

Centrer et réduire une loi X :

Soit X une variable aléatoire de paramètres E(X)=m et $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .La variable aléatoire centrée réduite correspondant est : $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

$E(Z)=0$ et $\sigma(Z)=1$. (les paramètres de Z ne dépendent pas de ceux de la variable X)

Si X_n suit la loi $B(n;p)$ la variable $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ (proportion du succès) a une espérance indépendante de *n* et σ diminue lorsque *n* augmente.

Théorème de Moivre Laplace :

On considère la variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $B(n;p)$ et Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée, on constate que le « haut » de l'histogramme représentant Z_n est « proche » de la courbe représentant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Théorème : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \le Z_n \le b) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ où $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ et $X_n = B(n;p)$.

Loi normale centrée réduite :

Définition : X suit la loi $N(0;1)$ si $P(a \le X \le b) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Propriétés : On démontre que $E(X) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 tf(t)dt + \lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^y tf(t)dt = 0$ et on admet que $\sigma(X) = 1$.

Théorème : Si $X = N(0;1)$, $\forall \alpha \in \left]0;1\right[$, $\exists! u_\alpha$, $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$

Démonstration : $P(-u \le X \le u) = 2P(0 \le X \le u) = 2\int_0^u f(x)dx = 2H(u)$.

La fonction *u* est continue strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et $1-\alpha$ est compris entre $2H(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2H(x) = 1$ donc d'après le TVI, il existe un unique antécédent à $1-\alpha$ par la fonction $2H$ que l'on notera u_α.

À connaître : $u_{0,05} \simeq 1,96$

$u_{0,01} \simeq 2,58$

Loi normale :

Définition : X suit la loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ si $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0;1)$.

Propriété : $E(X) = \mu =$ médiane

$V(X) = \sigma^2$

À connaître : $P(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \simeq 0,68$

$P(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \simeq 0,95$

$P(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \simeq 0,997$

Attention : les calculatrices ne fournissent pas $p(X \le x)$ mais $p(a \le X \le b)$:

- ✓ Si $x \ge \mu$, $P(X \le x) = 0,5 + P(\mu \le X \le x)$
- ✓ Si $x \le \mu$, $P(X \le x) = 0,5 - P(x \le X \le \mu)$

Intervalle de fluctuation :

Définition : Si X_n suit la loi $B(n;p)$ et $0<\alpha<1$ on appelle intervalle de fluctuation de X_n au seuil de $1-\alpha$ tout intervalle $[a;b]$ tel que $p(X_n \in [a;b]) \ge 1-\alpha$.

Théorème : Si $X_n = B(n;p)$, $\forall \alpha \in \left]0;1\right[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ où $I_n = \left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

avec u_α tel que $P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = 1-\alpha$ et $Z = N(0;1)$.

Démonstration : d'après Moivre Laplace : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \le Z_n \le u_\alpha) = P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha)$ où $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

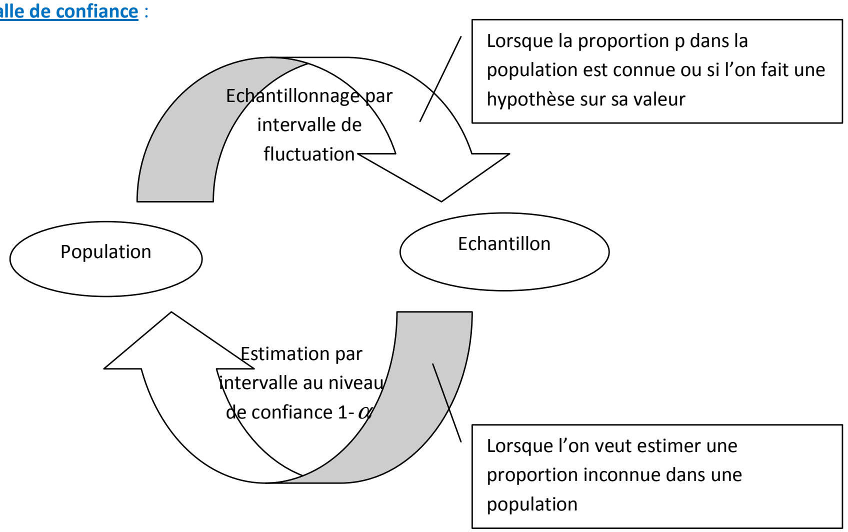
Or $P(-u_\alpha \le Z \le u_\alpha) = P\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \le X_n \le np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$

$= P\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le \dfrac{X_n}{n} \le p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$.

Si $n \ge 30$, $np \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$, $I_n = \left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ est l'intervalle de fluctuation asymptotique de $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ au seuil de $1-\alpha$.

À connaître : IFA au seuil de 95% : $\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

➢ **Intervalle de confiance** :



Définition : un IC pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est la réalisation à partir d'un échantillon d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$. Cet intervalle aléatoire est déterminé à partir de la V.A. $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Un seul intervalle à connaître pour $1-\alpha = 0,95$.

$I.C. = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ de la proportion p au niveau de confiance 95% dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Ainsi, à chaque tirage d'un échantillon, on obtient un intervalle de confiance différent.

Démonstration : supposons que *p* soit inconnu. On peut approcher p par la proportion *f* obtenue par les données de l'échantillon.

Or, pour *n* suffisamment grand, on a : $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,95$.

Mais $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \geq 0,95$ et donc l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la proportion *p* avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Et dans d'autres champs disciplinaires : $I.C. = \left[f - 1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} ; f + 1,96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$ mais on ne peut pas justifier cet intervalle en classe de terminale.