Les matrices sont vues comme des tableaux de nombres ; comme introduction, on peut s'inspirer des anciens documents d'accompagnement de ES ou de ceux de TS qui viennent d'être publiés.

I Un premier exercice

✯ Exercice 1 (d'après TES – Antilles-Guyane – Septembre 2009)
Dans une résidence de vacances d'été, les touristes vont tous les jours à la plage. Ils disposent pour se déplacer de deux moyens de locomotion : un minibus ou des bicyclettes. Le séjour dure un mois pour tous les vacanciers.
Chaque jour, ils peuvent modifier leur choix de transport. Le premier jour, 80 % des touristes choisissent le minibus.
On considère qu'ensuite, chaque jour, 30 % de ceux qui ont pris le minibus la veille choisissent la bicyclette et 15 % des vacanciers qui avaient emprunté la bicyclette la veille, choisissent le minibus.

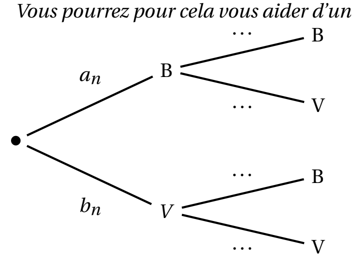
Partie A

À l'aide d'un arbre de probabilité, déterminer la proportion de touristes qui choisissent le bus le deuxième jour, puis le troisième jour.

Partie B

Modéliser la situation à l'aide d'un graphe probabiliste :
Le « 0,3 » s'interprète en disant que si l'on a pris le bus un jour, la probabilité de prendre une bicyclette le lendemain est 0,3.

1. Chaque jour la proportion de touristes prenant l'un des deux moyens de transport peut être représentée par une matrice ligne.
   Ainsi, le premier jour, la matrice ligne correspondante est $\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\end{pmatrix}$
   Donner la matrice ligne correspondant au deuxième jour.
2. Soit n est un entier entre 1 et 31. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant l'état probabiliste relatif au n-ième jour, où :
   a_n représente la proportion des vacanciers choisissant le minibus le jour n ;
   b_n représente la proportion des vacanciers choisissant la bicyclette le jour n.
   Déterminer P_3.
3. L'état probabiliste du $(n+1)$-ième jour, ne dépend que de celui du n-ième jour ; déterminer une matrice M de rang 2, telle que pour tout entier naturel n appartenant à l'intervalle $[1;31]$ on a $P_{n+1} = P_n M$.
   Vous pourrez pour cela vous aider d'un arbre de probabilité :



   Cette matrice M est la matrice de transition.
4. On suppose que $\mathrm{M}^5 = \begin{pmatrix}0,367 & 0,633\\0,317 & 0,683\end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}^6 = \begin{pmatrix}0,352 & 0,648\\0,324 & 0,676\end{pmatrix}$, les coefficients ayant été arrondis au millième.
   En utilisant la matrice qui convient, déterminer la répartition prévisible le 6-ième jour. On donnera le résultat en pourcentage arrondi à 1 % près.
5. Déterminer, s'ils existent, deux nombres réels x et y tels que, si $Q = (x \quad y)$, alors $Q = QM$.
   Donner une interprétation concrète de x et y.

II À connaître

Théorème 1
Soit P une matrice stochastique (la somme des éléments de toutes les lignes est égal à 1), régulière (une puissance de P à tous ces éléments non nuls. Alors :

1. Il existe un unique vecteur de probabilité (matrice ligne dont la somme des éléments [positifs] est égale à 1) t tel que $t = tP$.
2. La suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice Q dont toutes les lignes sont identiques égales à t.
3. Si p est un vecteur de probabilité quelconque , alors la suite des matrices lignes $(pP^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers t.

✯ Exercice 2
http://serge.mehl.free.fr/exos/graphe_matr_transition.html Serge Mehl
Dans une région, on considère 3 types de temps :
Beau (événement B), Variable (V) et Pluvieux (P).

- Lorsque le temps est beau, on estime à $\frac{1}{3}$ la probabilité qu'il fasse encore beau le lendemain et à $\frac{1}{6}$ qu'il pleuve.
- Si le temps est variable, on estime à $\frac{1}{4}$ la probabilité qu'il le reste le lendemain et à $\frac{1}{2}$ qu'il pleuve.
- Enfin, s'il pleut, on estime à $\frac{1}{4}$ la probabilité qu'il pleuve encore le lendemain et à $\frac{1}{2}$ qu'il fasse beau.

1. Représenter cette situation météorologique par un graphe probabiliste et établir sa matrice de transition.
2. Aujourd'hui, il fait beau. Quelle sont les probabilités, dans 2 jours, des 3 types de temps ?
3. Que peut-on prévoir à « long terme » ?

III Urnes d'Ehrenfest

Le problème :
On considère une enceinte composée de deux compartiments de même taille et séparé par un orifice. On remplit l'un des compartiments d'un gaz ; on constate que les molécules du gaz vont se répartir entre les deux compartiments jusqu'à atteindre une situation d'équilibre. Le principe de réversibilité semble mis en défaut.
Les époux Ehrenfest, chimistes, on proposé un modèle pour étudier ce phénomène : on considère deux urnes ; l'une des deux est remplie de N balles. À chaque instant on choisit « au hasard » une balle et on la change d'urne.

Avec les élèves, on peut proposer des simulations à l'aide d'Excel et leur demander d'énoncer des conjectures : y a-t-il retour à la situation initiale, au bout d'un temps « très long », que se passe-t-il ?
On peut aussi pour des petites valeurs de N traduire cette situation à l'aide de chaînes de Markov. L'espace des états est de cardinal $N+1$; l'état E_i étant celui où i balles se trouvent dans l'urne A.
On peut demander aux élèves d'écrire la matrice de transition et obtenir pour le temps n l'état probabiliste du système
La théorie nous dit que le temps nécessaire au retour à l'état initial (toutes les balles dans A) est 2^N, (1 tirage par seconde).

⋆ EXERCICE 3

On modélise le mouvement de 7 molécules entre deux compartiments A et B de la façon suivante : chaque seconde une molécule, choisie au hasard parmi les 7 molécules, change de compartiment.
On note X_n le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n.

1. Donner la matrice de transition associée à ce modèle.
2. À l'aide d'un outil adapté estimer la probabilité qu'il y ait 4 molécules dans le compartiement A.

⋆ EXERCICE 4 (ÉTUDE DU CAS $N = 2$)
d'après IREM DE MONTPELLIER – Alain Marie-Jeanne, Frédéric Beau, Michel Janvier
L'espace des états est alors de cardinal 3.
Notons P_n la matrice ligne correspondant à l'état probabiliste de l'étape n.
On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, car à l'instant initial l'urne A contient deux boules.

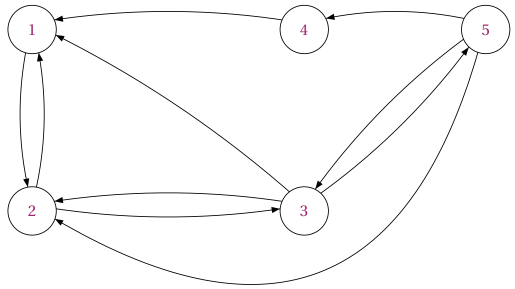
1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. À l'aide d'une calculatrice calculer M^{10}, M^{20}, où M est la matrice de transition.
3. Temps de retour à l'état initial.
   Soit n un entier naturel non nul et p_n la probabilité de revenir à l'état initial en n étapes exactement.
   Calculer p_1, p_2, p_3, p_4. (Vous pourrez construire un arbre de probabilité).
4. On considère $2n$ étapes de l'expérience précédente et on note T_n la variable aléatoire qui associe le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial ou 0 si on ne revient pas à l'état initial en $2n$ étapes. On note $E(T_n)$ l'espérance de T_n .
   Montrer que $E(T_n) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{j}{2^{j-1}}$.
5. Calculer la somme précédente.

IV Pagerank

Lorsque l'on fait une recherche sur internet le moteur de recherche renvoie un certain nombre de pages. on peut se poser la question de savoir comment ces pages sont classées. Certaines pages sont plus « importantes » que d'autres. Pour mesurer l'importance d'une page on choisit
d'accorder plus d'importance aux pages référencées par des pages qui font elles-mêmes autorité dans le domaine.
d'accorde moins d'importance à une référence, si elle provient d'une page qui dispose de nombreux liens.
À chaque page on associe un nombre réel qui mesure son importance ; ainsi si μ_i désigne le « score » de la page i, alors $\mu_i = \sum_{j\to i} \frac{\mu_j}{l_j}$, où l_j désigne le nombre de liens émis par la page j, la somme se faisant sur les pages j qui émettent un lien vers la page i.
On utilise l'outil matriciel pour « résoudre le système obtenu ».
On peut aussi voir le calcul du pagerank comme une marche aléatoire sur un graphe à n sommets.

⋆ EXERCICE 5

On considère un système constitué de 5 pages ; les liens entre les pages sont figurés par le graphe ci-dessous.



Ainsi étant sur la page 5, on peut atteindre de manière équiprobable les pages 2, 3 ou 4.

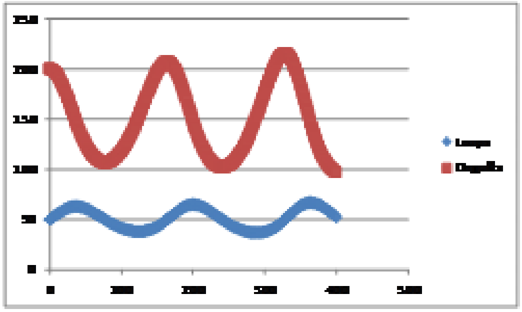
1. Vérifier que la matrice de transition associée est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, où a_{ij} représente la probabilité d'aller sur la page j étant sur la page i.
2. Résoudre l'équation $X = XA$, où X désigne la matrice ligne $X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ avec $a + b + c + d + e = 1$.
3. On suppose qu'au début de notre « surf » on se trouve sur la page 1 ; qu'elle est la probabilité de se trouver sur la page 3 au bout de 2 étapes ?
4. À l'aide de l'outil le plus adapté calculer A^2, A^{10}, A^{100} et interpréter la réponse obtenue.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On considère la matrice $B = 0,85A + 0,15 \times \frac{1}{5}M$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (B est la matrice correspondant à une perturbation du système).
   À l'aide de l'outil le plus adapté déterminer $\lim_{n\to+\infty} B^n$ et comparer avec les résultats précédents.

V Modèle proie-prédateur

Une étude est menée dans le massif du Mercantour pour mesurer l'effet de l'introduction de loups sur la population d'ongulés.

a) Les loups sont résistants, leur taux de mortalité, indépendant de la quantité de nourriture est de 0,03, mais les jeunes ont besoin de nourriture et leur taux de survies est proportionnel à la quantité d'ondulés avec un coefficient égal à 0,0002. On note u_n (respectivement v_n) la quantité de loups (respectivement ongulés) recensée l'année n Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,97u_n + 0,0002u_n v_n$.
b) Les ongulés, mangés par les loups, ont un taux de mortalité proportionnel au nombre de loups avec un coefficient de 0,001 mais leur taux de natalité est 0,05 (indépendant du nombre de loups).
   Donner l'expression de v_{n+1} en fonction de u_n et v_n , pour tout nombre entier naturel n.

c) À l'aide d'un tableur on trace les nuages de points correspondant aux deux suites :



Que remarque-t-on ? Déterminer graphiquement la période des oscillations, les tailles maximum et minimum ainsi que la valeur moyenne de l'effectif de chacune des populations.

d) Une association écologique locale souhaiterait introduire plus de loups.
Les scientifiques montrent alors que le coefficient de mortalité des ongulés augmenterait jusqu'à la valeur 0,0025. Tracer le nuage de points. Que remarque-t-on ?

e) Déterminer l'état stable du système initial. On le notera $S=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$.

f) On admet qu'étudier le système initial au voisinage du point d'équilibre revient à étudier le système matriciel :
$V_{n+1}-V_n=JV_n$, où $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$, $\quad V_n=U_n-S$ et $J=\begin{pmatrix}0 & 0,01\\-0,15 & 0\end{pmatrix}$.
Donner alors le système linéaire vérifié par les deux suites.

g) Le système peut s'écrire $U_{n+1}=AU_n+C$; montrer que $V_{n+1}=A^nV_0$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel étudier le comportement de la suite V_n.

VI Chiffre de Hill

✯ Exercice 6 (chiffre de Hill)

http://www.apprendre-en-ligne.net/auteur/articles/Hill.pdf

Ce chiffre a été publié par Lester S. Hill en 1929 (cf. réf. [2]). C'est un chiffre polygraphique, c'est-à-dire qu'on ne (dé)chiffre pas les lettres les unes après les autres, mais par paquets.

1. On remplace les lettres par leur rang dans l'alphabet :

A	B	C	D	E	F…	X	Y	Z
1	2	3	4	5	…	24	25	26

2. Les lettres L_k et L_{k+1} du texte seront chiffrées C_k et C_{k+1} par :

$$\begin{pmatrix}C_k\\C_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_k\\L_{k+1}\end{pmatrix}\pmod{26}$$

3. Exemple :…

4. Décodage : il s'agit d'inverser la matrice : tout d'abord on doit avoir $ad-bc\neq 0\pmod{26}$.

Or la matrice inverse dans $\mathbb{R}$ de $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$: on va traiter sur un exemple le problème de l'inversion dans $\mathbb{Z}_{26}$.

a) Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 5\\3 & -2\end{pmatrix}$ (calcul à la main ou outil adapté) : ce n'est pas une matrice à coefficients entiers naturels.

b) On cherche donc l'inverse de 7 modulo 26, c'est à dire un entier a tel que $7a\equiv 1\pmod{26}$.

– « à la main » : tester toutes les valeurs.
– Bézout : résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $7u+26v=1$: a est la valeur de u entière de $[1;25]$.

Ici, on trouve $a=15$ et donc la « matrice de décryptage » est $\begin{pmatrix}18 & 23\\19 & 22\end{pmatrix}$.

✯ Exercice 7 (Complément)

Attaque du chiffre de Hill : Vous avez intercepté le message suivant de vos ennemis : YKTZZUDCLWQOAGKIHXRVANYSPWBYDCLS. Votre espion vous a informe que pour communiquer, l'état-major adverse utilise le chiffrement de Hill. En outre, connaissant le côté protocolaire des messages militaires, vous êtes sûr que ce message commence par MONGENERAL. On note A la matrice de chiffrement.

a) Justifier que $\begin{pmatrix}24 & 19\\10 & 25\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}12 & 13\\14 & 6\end{pmatrix}$

b) Que suffirait-il pour retrouver A. Pourquoi cela est impossible ici ?

c) Retrouver A en exploitant une autre égalité (du type de la précédente).

d) Décrypter le message complet.

Solution de l'exercice 7:

http://www.bibmath.net/crypto/poly/hill/hillcor.pdf