# Les polyèdres platoniciens

Un **polyèdre** est un volume limité par des **faces** planes. L'intersection de deux faces est une **arête** et l'intersection de deux arêtes est un **sommet**.
Un polyèdre est **convexe** s'il est toujours situé d'un même côté du plan d'une quelconque de ses faces.
Un polyèdre convexe est **régulier** si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si en chaque sommet aboutit le même nombre de faces.

Définition : Un **polyèdre platonicien** est un polyèdre convexe régulier.

Théorème : <u>Formule d'Euler :</u> dans un polyèdre convexe, si s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, on a : $s-a+f=2$.
Démonstration :

1. Si les faces ne sont pas toutes des triangles, on trace une diagonale de plus. On a donc une face de plus et une arête de plus. Donc $s-a+f$ reste inchangé.
2. On enlève une face, en réalisant le graphe planaire du solide. On doit alors montrer que : $s-a+f=1$.
3. Si on enlève une arête du bord, on a alors une arête en moins et une face en moins. On doit donc toujours démontrer que $s-a+f=1$.
4. Si on enlève une arête ne limitant pas un triangle, on a un sommet en moins et une arête en moins. On doit donc toujours démontrer que $s-a+f=1$.
5. Finalement il nous reste un triangle avec $s=3$, $f=1$, $a=3$ donc $s-a+f=1$. Cqfd.

Illustration de cette démonstration avec le cube :

<u>Polyèdres de Platon :</u>
Soit c le nombre de côtés d'une face (c est donc constant).
Soit n le nombre de faces (ou d'arêtes) aboutissant en un sommet.
$c \geq 3$, $n \geq 3$.

1. $cf=2a$ et $ns=2a$ (on compte chaque arête deux fois).
2. $s-a+f=2$ donc $a\,(s/a+f/a-1) = a\,(2/n+2/c-1) = 2$.

Donc $2/c > 1-2/n$.
$n \geq 3$ ; donc $-2/n \geq -2/3$ ; donc $2/c > 1/3$ ; donc $c < 6$.

**<u>c=3.</u>** $a\,(2/n-1/3) = 2$ ; $s-a/3 = 2$ ; $f=2+a-s$.
Si $n=3$, $a=6$, $s=4$, $f=4$ : tétraèdre.
Si $n=4$, $a=12$, $s=6$, $f=8$ : octaèdre.
Si $n=5$, $a=30$, $s=12$, $f=20$ : icosaèdre.
Si $n=6$, ax0… impossibble.

**<u>c=4.</u>** $a\,(2/n-1/2) = 2$ ; donc $n<4$
Si $n=3$, $a=12$, $s=8$, $f=6$ : cube.

**<u>c=5.</u>** $n=3$, $a=30$, $s=20$, $f=12$ : dodécaèdre.

| Noms | f | a | s | Nature des faces |
|---|---|---|---|---|
| Tétraèdre régulier | 4 | 6 | 4 | triangle équilatéral |
| Hexaèdre régulier (cube) | 6 | 12 | 8 | carré |
| Octaèdre régulier | 8 | 12 | 6 | triangle équilatéral |
| Dodécaèdre régulier | 12 | 30 | 20 | pentagone régulier |
| Icosaèdre régulier | 20 | 30 | 12 | triangle équilatéral |

<u>Sites à consulter :</u>
- Pour une illustration de la formule d'Euler :
http://gersoo.free.fr/docs/euler/eulersfa.html
- Pour les solides de Platon, ainsi qu'une autre démonstration concernant leur nombre :
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm